

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 4/5/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 18/5/2022

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙ-ΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1.

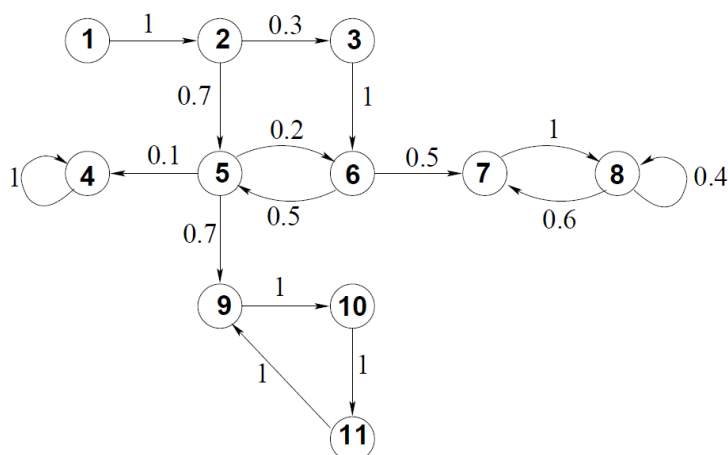
Ο Χρήστος και ο Ανδρέας ρίχνουν επί μια εβδομάδα ένα κέρμα το οποίο φέρνει κορώνα με πιθανότητα $2/3$. Η Μαρία είναι η διαιτητής της αναμέτρησης. Στην αρχή η Μαρία ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα. Αν έρθει κορώνα, τότε ο Χρήστος ρίχνει το κέρμα. Αν έρθουν γράμματα παίζει ο Ανδρέας. Αν το κέρμα φέρει κορώνα, ο παίκτης που το πέταξε κερδίζει ενώ αν φέρει γράμματα κερδίζει ο άλλος παίκτης. Ο παίκτης που κερδίζει το γύρο ρίχνει το κέρμα στον επόμενο γύρο.

- α) Ορίστε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει αυτό το πείραμα και δώστε το γράφημά της. Δώστε επίσης τον πίνακα μετάβασης της αλυσίδας.
- β) Βρείτε την πιθανότητα του γεγονότος: Ο Χρήστος ρίχνει πρώτος το κέρμα, χάνει τον πρώτο γύρο και κερδίζει τον δεύτερο γύρο.

Άσκηση 2.

Θεωρήστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που δίνεται από το παρακάτω γράφημα.

- α) Να προσδιορίσετε τις μεταβατικές και τις έμμονες καταστάσεις της αλυσίδας.
- β) Να προσδιορίσετε τις κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας.
- γ) Για κάθε έμμονη κατάσταση, να αποφασίσετε αν είναι περιοδική ή απεριοδική. Επαληθεύστε ότι οι έμμονες καταστάσεις που ανήκουν στην ίδια κλάση επικοινωνίας έχουν την ίδια περίοδο.
- δ) Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο αριθμό μεταβάσεων με μη μηδενική πιθανότητα που πρέπει να προστεθούν στην αλυσίδα ώστε και οι 11 καταστάσεις να αποτελούν μια μοναδική κλάση επικοινωνίας.

**Άσκηση 3.**

Δύο εταιρίες ανταγωνίζονται η μία την άλλη στην αγορά αναψυκτικών. Κάθε μία προσπαθεί να ξεπεράσει την άλλη μέσω της διαφήμισης. Αν κάποια χρονιά οι εταιρίες έχουν τον ίδιο προϋπολογισμό για διαφήμιση, υπάρχει 50% πιθανότητα ότι θα έχουν τον ίδιο προϋπολογισμό την επόμενη χρονιά και αν δεν έχουν, υπάρχει ίση πιθανότητα ότι κάποια από τις δύο θα ξοδέψει περισσότερα. Αν η μία εταιρία ξοδέψει περισσότερα τη μία χρονιά, την επόμενη χρονιά η άλλη εταιρία θα ξοδέψει περισσότερα με πιθανότητα $2/3$ ενώ θα ξοδέψουν το ίδιο με πιθανότητα $1/3$.

- Μοντελοποιείτε το παραπάνω σύστημα με μία Μαρκοβιανή αλυσίδα και δώστε τον πίνακα μετάβασης της αλυσίδας αυτής.
- Αναγνωρίστε τις κλάσεις έμμονων καταστάσεων της αλυσίδας αυτής και χαρακτηρίστε τις ως περιοδικές ή αperiοδικές. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- Ποια η οριακή πιθανότητα ότι σε μία χρονιά στο απώτερο μέλλον οι δύο εταιρίες θα έχουν ίδιους προϋπολογισμούς διαφήμισης;

Άσκηση 4.

Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με τρεις καταστάσεις $\{1, 2, 3\}$ που περιγράφεται από τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

- Σχεδιάστε το γράφημα της αλυσίδας αυτής. Αναγνωρίστε τις κλάσεις έμμονων καταστάσεων και χαρακτηρίστε τις ως περιοδικές ή αperiοδικές. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- Βρείτε τη στατική κατανομή στο χώρο καταστάσεων της αλυσίδας.
- Αν η διαδικασία ξεκινάει απ' την κατάσταση 2, βρείτε την πιθανότητα να βρίσκεται στην κατάσταση 2 μετά από 2 βήματα.

Άσκηση 5.

Έστω $X_n, n \geq 0$ δυαδική στοχαστική διαδικασία που παίρνει τιμές 0 ή 1. Δίνονται:

$$\begin{aligned} P_{X_0}(1) &= 1, \\ P_{X_{n+1}/X_n}(1/1) &= 3/4, n \geq 0 \\ P_{X_{n+1}/X_n}(0/0) &= 2/3, n \geq 0 \end{aligned}$$

- α) Δώστε το γράφημα της Μαρκοβιανής αλυσίδας που περιγράφει το πείραμα, καθώς και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.
- β) Υπολογίστε την πιθανότητα το πρώτο μηδέν να εμφανιστεί σε χρόνο k , για $k = 1, 2, 3, \dots$
- γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_2 = 1)$.
- δ) Υπολογίστε τις οριακές πιθανότητες $P(X_{10000} = 1)$ και $P(X_{10000} = 0)$.
- ε) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_{10000} = 0 \text{ και } X_{10002} = 0)$.

Άσκηση 6.

Ένας χρονοπρογραμματιστής (scheduler) μπορεί να προγραμματίσει να εκτελεστούν παράλληλα μέχρι M διεργασίες λόγω χωρητικότητας. Το λειτουργικό σύστημα δίνει με πιθανότητα p μια καινούρια διεργασία στον χρονοπρογραμματιστή, ο οποίος εκτελεί μια διεργασία με πιθανότητα q/k , όπου k ο αριθμός των διεργασιών που παραμένουν κάθε φορά. Συνεπώς, κάθε χιλιοστό του δευτερολέπτου συμβαίνει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα γεγονότα:

- μια διεργασία ανατίθεται στον χρονοπρογραμματιστή με πιθανότητα p
- μια διεργασία ολοκληρώνεται με πιθανότητα $\frac{q}{k}$, όπου k ο αριθμός των διεργασιών που παραμένουν κάθε φορά
- καμία διεργασία δεν ανατίθεται ή ολοκληρώνεται με πιθανότητα $1 - p - \frac{q}{k}$ αν έχουν ανατεθεί από 2 έως $M - 1$ διεργασίες, ή με πιθανότητα $1 - p$ αν έχει ανατεθεί μόνο μια διεργασία, ή με πιθανότητα $1 - \frac{q}{M-1}$ αν έχουν ανατεθεί M διεργασίες.

- α) Μοντελοποιήστε το πρόβλημα αυτό μέσω μιας στοχαστικής διαδικασίας γεννήσεως-θανάτου, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο χρονοπρογραμματιστής θα έχει πάντα τουλάχιστον μια διεργασία να εκτελέσει.
- β) Υπολογίστε τις πιθανότητες της στατικής κατανομής της αλυσίδας.

Άσκηση 7.

Μια εταιρία ταξινομεί τους πελάτες της σε τρεις κατηγορίες: μη ικανοποιημένους, ικανοποιημένους και πολύ ικανοποιημένους. Κανένας πελάτης δεν μπορεί να πάει μέσα σε ένα χρόνο απ'την κατηγορία μη ικανοποιημένος στην κατηγορία πολύ ικανοποιημένος και το αντίστροφο. Το 30% των μη ικανοποιημένων πελατών γίνονται ικανοποιημένοι, το 40% των ικανοποιημένων πελατών γίνονται πολύ ικανοποιημένοι, ενώ το 20% των ικανοποιημένων πελατών γίνονται μη ικανοποιημένοι, και το 10% των πολύ ικανοποιημένων πελατών γίνονται ικανοποιημένοι.

- α) Δημιουργήστε την Μαρκοβιανή αλυσίδα που αντιστοιχεί στο παραπάνω πρόβλημα και δώστε το γράφημά της στη Matlab χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις *dtmc* και *graphplot*.

- β) Υπολογίστε τις πιθανότητες της στατικής κατανομής και επαληθεύστε τις με εκείνες που προκύπτουν χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *asymptotics* της Matlab.
- γ) Υπολογίστε τις πιθανότητες $r_{11}(n), r_{22}(n), r_{33}(n)$ για $n = 1, \dots, 50$ και παρουσιάστε τις σε ένα διάγραμμα συναρτήσεως του n . Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει το n ;
- δ) Προσομοιώστε ένα τυχαίο περίπατο 20 βημάτων που ξεκινάει από μια τυχαία κατάσταση της αλυσίδας αυτής και οπτικοποιήστε τον χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις *simulate* και *simplot* της Matlab.

Παραθέστε τον κώδικά σας μαζί με τα ζητούμενα της άσκησης.