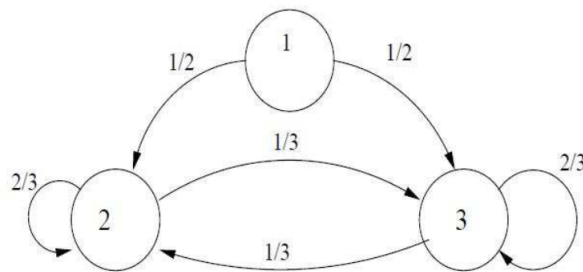


Άσκηση 1.

- α) Ορίζουμε ως κατάσταση 1 το γεγονός ότι η Μαρία ρίχνει το κέρμα, την κατάσταση 2 ως το γεγονός ότι ο Χρήστος κερδίζει το γύρο και την κατάσταση 3 ως το γεγονός ότι ο Ανδρέας κερδίζει το γύρο. Το γράφημα της αλυσίδας δίδεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 1.

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

- β) Έστω A το γεγονός «Ο Χρήστος ρίχνει πρώτος το κέρμα, χάνει τον πρώτο γύρο και κερδίζει τον δεύτερο γύρο». Τότε

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

καθώς $1/2$ είναι η πιθανότητα ο Χρήστος να ρίξει πρώτος το κέρμα (δηλαδή η Μαρία να φέρει κορώνα), $1/3$ η πιθανότητα ο Χρήστος να χάσει τον πρώτο γύρο οπότε μετά παίζει ο Ανδρέας, και $1/3$ η πιθανότητα να χάσει ο Ανδρέας το δεύτερο γύρο για να νικήσει ο Χρήστος.

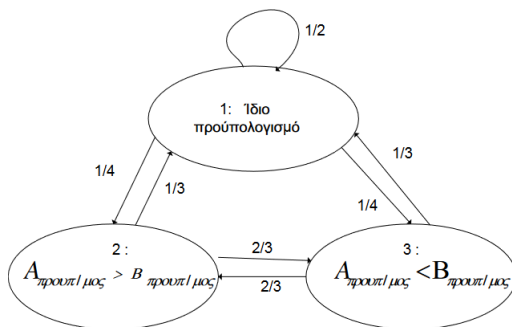
Άσκηση 2.

- α) Οι καταστάσεις 4,7,8,9,10,11 είναι έμμονες καθώς είναι προσιτές από όλες τις καταστάσεις της κλάσης τους αλλά όχι από καταστάσεις άλλων κλάσεων και αν τις επισκεφτούμε, θα επανέλθουμε σε αυτήν άπειρες φορές.
Οι καταστάσεις 1,2,3,5,6 είναι μεταβατικές καθώς δεν είναι προσιτές από όλες τις καταστάσεις της αλυσίδας και απλά με αυτές μεταβαίνουμε κάπου.
- β) Οι κλάσεις επικοινωνίας αποτελούνται από έμμονες καταστάσεις. Άρα οι κλάσεις επικοινωνίας είναι οι εξής: $\{4\}, \{7,8\}, \{9,10,11\}$ καθώς οι καταστάσεις κάθε μιας από αυτές τις κλάσεις, επικοινωνούν όλες μεταξύ τους, αλλά καμία με τις εξωτερικές καταστάσεις.

- γ) Για την κατάσταση 4, το σύστημα επιστρέφει στην κατάσταση αυτή μετά από n βήματα για οποιοδήποτε $n \geq 1$. Άρα η 4 είναι απεριοδική.
 Για την κατάσταση 7, το σύστημα επιστρέφει πίσω στην κατάσταση 7 με:
 2 μεταβάσεις: $7 \rightarrow 8 \rightarrow 7$ ή
 3 μεταβάσεις: $7 \rightarrow 8 \rightarrow 8 \rightarrow 7$
 και γενικά το σύστημα επιστρέφει στην κατάσταση 7 μετά από n βήματα για οποιοδήποτε $n \geq 2$.
 Άρα η 7 είναι απεριοδική.
 Για την κατάσταση 8, το σύστημα επιστρέφει πίσω στην κατάσταση 8 με:
 1 μετάβαση: $8 \rightarrow 8$ ή
 2 μεταβάσεις: $8 \rightarrow 7 \rightarrow 8$
 και γενικά το σύστημα επιστρέφει στην κατάσταση 8 μετά από n βήματα για οποιοδήποτε $n \geq 1$.
 Άρα η 8 είναι απεριοδική.
 Για την κατάσταση 9, το σύστημα επιστρέφει στην κατάσταση αυτή με 3 μεταβάσεις μόνο $9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 9$. Άρα η 9 είναι περιοδική με περίοδο 3. Ομοίως για τις καταστάσεις 10 και 11.
 Άρα παρατηρούμε ότι οι καταστάσεις που ανήκουν στην ίδια κλάση επικοινωνίας έχουν την ίδια περίοδο!
- δ) Για τη δημιουργία μιας μοναδικής κλάσης επικοινωνίας πρέπει να προστεθούν 3 μεταβάσεις. Για παράδειγμα, μια μετάβαση από την κατάσταση 4 στην κατάσταση 1, μια από την κατάσταση 10 στην κατάσταση 6 και μια από την κατάσταση 7 στην 6.
 Γενικά πρέπει να προστεθεί μια μετάβαση από κάθε κατάσταση κάθε κλάσης επικοινωνίας σε κάποια από τις υπόλοιπες καταστάσεις του συστήματος εκτός της ίδιας κλάσης.

Άσκηση 3.

- α) Έστω A, B οι δύο εταιρίες. Η Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντελοποιείται όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 3.

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

β) Η αλυσίδα αποτελεί μια κλάση έμμονων καταστάσεων καθώς κάθε κατάσταση είναι προσιτή από όλες τις άλλες καταστάσεις. Ωστόσο, δεν είναι περιοδική καθώς οι καταστάσεις της δεν μπορούν να ομαδοποιηθούν σε ξένα υποσύνολα ώστε όλες οι μεταβάσεις από το ένα υποσύνολο να οδηγούν στο επόμενο.

γ) Αυτό που ζητείται είναι ουσιαστικά η οριακή πιθανότητα π_1 .

Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_2 &= \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_3 \\ \pi_3 &= \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2\end{aligned}$$

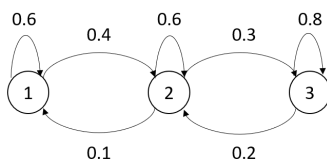
Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την $\sum_i \pi_i = 1$ έχουμε τελικά:

$$\pi_1 = \frac{4}{10}, \quad \pi_2 = \frac{3}{10}, \quad \pi_3 = \frac{3}{10}.$$

Άρα η οριακή πιθανότητα ότι σε μια χρονιά στο απώτερο μέλλον οι δυο εταιρίες θα έχουν ίδιους προϋπολογισμούς διαφήμισης είναι 40%.

Άσκηση 4.

α) Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 4.

Από το γράφημα της αλυσίδας παρατηρούμε ότι κάθε κατάσταση είναι προσιτή από όλες τις άλλες καταστάσεις. Άρα η αλυσίδα αυτή αποτελεί μια κλάση έμμονων καταστάσεων, η οποία είναι απεριοδική καθώς οι καταστάσεις της δεν μπορούν να ομαδοποιηθούν σε ξένα υποσύνολα ώστε όλες οι μεταβάσεις από το ένα υποσύνολο να οδηγούν στο επόμενο.

β) Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 0.6\pi_1 + 0.1\pi_2 \\ \pi_2 &= 0.4\pi_1 + 0.6\pi_2 + 0.2\pi_3 \\ \pi_3 &= 0.3\pi_2 + 0.8\pi_3\end{aligned}$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την $\sum_i \pi_i = 1$ έχουμε τελικά:

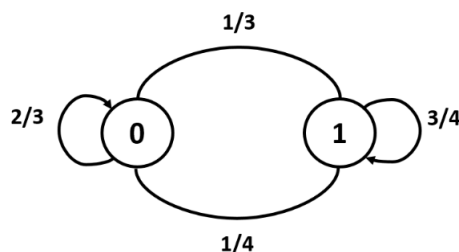
$$\pi_1 = \frac{1}{11}, \quad \pi_2 = \frac{4}{11}, \quad \pi_3 = \frac{6}{11}.$$

γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} p_{22}^{(2)} &= \sum_{i=1}^3 p_{2i}p_{i2} = p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} + p_{23}p_{32} \\ &= 0.1 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.2 \\ &= 0.46 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

α) Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 5.

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

β) Η διαδικασία ξεκινάει πάντα στην κατάσταση 1, οπότε η πιθανότητα «το πρώτο μηδέν προκύπτει σε χρόνο 1» θα είναι $1/4$. Επίσης, η πιθανότητα «το πρώτο μηδέν προκύπτει σε χρόνο 2» θα είναι $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$.

Γενικά σε χρόνο k θα έχουμε $(\frac{3}{4})^{k-1} \cdot \frac{1}{4}$, $k = 1, 2, \dots$

γ) Αφού ξέρουμε ότι $P(X_0 = 1) = 1$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_2 = 1|X_1 = 0) \cdot P(X_1 = 0) + P(X_2 = 1|X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1) \\ &= P(X_2 = 1|X_1 = 0, X_0 = 1) \cdot P(X_1 = 0|X_0 = 1) \cdot P(X_0 = 1) + \\ &\quad P(X_2 = 1|X_1 = 1, X_0 = 1) \cdot P(X_1 = 1|X_0 = 1) \cdot P(X_0 = 1) \\ &= P(X_2 = 1|X_1 = 0) \cdot P(X_1 = 0|X_0 = 1) \cdot P(X_0 = 1) + \\ &\quad P(X_2 = 1|X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1|X_0 = 1) \cdot P(X_0 = 1) \\ &= p_{01} \cdot p_{10} \cdot 1 + p_{11} \cdot p_{11} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{31}{48} \end{aligned}$$

δ) Ουσιαστικά ζητούνται οι οριακές πιθανότητες π_1 και π_0 αντίστοιχα. Άρα, γράφοντας τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{2}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 \\ \pi_1 &= \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_1 \end{aligned}$$

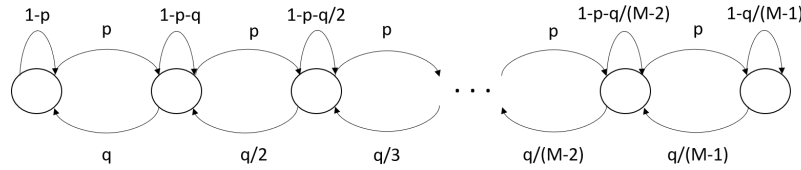
και λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την $\pi_0 + \pi_1 = 1$, έχουμε τελικά: $\pi_0 = \frac{3}{7}$ και $\pi_1 = \frac{4}{7}$. Άρα $P(X_{10000} = 1) \approx \frac{4}{7}$ και $P(X_{10000} = 0) \approx \frac{3}{7}$.

ε) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P(X_{10000}=0 \text{ και } X_{10002}=0) &= P(X_{10002}=0|X_{10000}=0) \cdot P(X_{10000}=0) \\
 &= P(X_{10002}=0|X_{10001}=0, X_{10000}=0) \cdot P(X_{10001}=0|X_{10000}=0) \cdot P(X_{10000}=0) + \\
 &\quad P(X_{10002}=0|X_{10001}=1, X_{10000}=0) \cdot P(X_{10001}=1|X_{10000}=0) \cdot P(X_{10000}=0) \\
 &= P(X_{10002}=0|X_{10001}=0) \cdot P(X_{10001}=0|X_{10000}=0) \cdot P(X_{10000}=0) + \\
 &\quad P(X_{10002}=0|X_{10001}=1) \cdot P(X_{10001}=1|X_{10000}=0) \cdot P(X_{10000}=0) \\
 &= p_{00} \cdot p_{00} \cdot \pi_0 + p_{10} \cdot p_{01} \cdot \pi_0 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{3}{7} = \frac{19}{84}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

α) Ορίζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, το γράφημα της οποίας φαίνεται στο Σχήμα 5, με τόσες καταστάσεις όσες και οι διεργασίες που έχει να εκτελέσει ο χρονοπρογραμματιστής κάθε χιλιοστό του δευτερολέπτου, δηλαδή $1, 2, 3, \dots, M$.



Σχήμα 5: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 6.

β) Για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα αυτή, οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\begin{aligned}
 \pi_i \cdot p &= \pi_{i+1} \cdot \frac{q}{i} \Rightarrow \\
 \pi_{i+1} &= \frac{p}{q} \cdot i \cdot \pi_i
 \end{aligned}$$

Έστω $\rho = \frac{p}{q}$, τότε $\pi_{i+1} = i \cdot \rho \cdot \pi_i$ για $i = 1, \dots, M-1$ άρα

$$\pi_i = (i-1)! \rho^{(i-1)} \pi_1 \text{ για } i = 1, 2, \dots, M$$

Όμως $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_M = 1$ και επομένως

$$\pi_1 (1 + 1! \rho^1 + 2! \rho^2 + \dots + (M-1)! \rho^{(M-1)}) = 1 \Rightarrow$$

$$\pi_1 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{M-1} k! \rho^k}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι

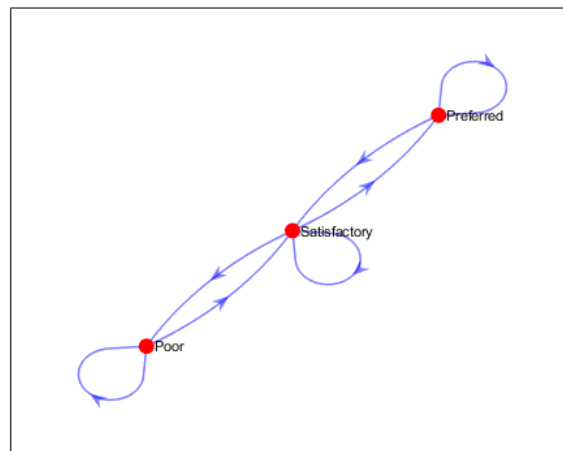
$$\pi_i = \frac{(i-1)! \rho^{(i-1)}}{\sum_{k=0}^{M-1} k! \rho^k} \text{ για } i = 1, 2, \dots, M.$$

Άσκηση 7.

α) Έστω οι καταστάσεις *Poor* (μη ικανοποιημένοι), *Satisfactory* (ικανοποιημένοι), *Preferred* (πολύ ικανοποιημένοι). Ο πίνακας μετάβασης της αλυσίδας Markov που προκύπτει σύμφωνα με τις πληροφορίες που δίνονται από την εκφώνηση είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

και το γράφημα της αλυσίδας που προκύπτει φαίνεται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6: Το γράφημα της αλυσίδας για την Άσκηση 7.

Ο κώδικας στη Matlab για τη δημιουργία της αλυσίδας και του γραφήματός της φαίνεται παρακάτω:

```
P = [0.7 0.3 0;0.2 0.4 0.4;0 0.1 0.9];
categories = dtmc(P,'StateNames',["Poor" "Satisfactory" "Preferred"]);
figure; graphplot(categories);
```

β) Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 0.7\pi_1 + 0.2\pi_2 \\ \pi_2 &= 0.3\pi_1 + 0.4\pi_2 + 0.1\pi_3 \\ \pi_3 &= 0.4\pi_2 + 0.9\pi_3\end{aligned}$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την $\sum_i \pi_i = 1$ έχουμε τελικά:

$$\pi_1 = 0.1176, \pi_2 = 0.1765, \pi_3 = 0.7059$$

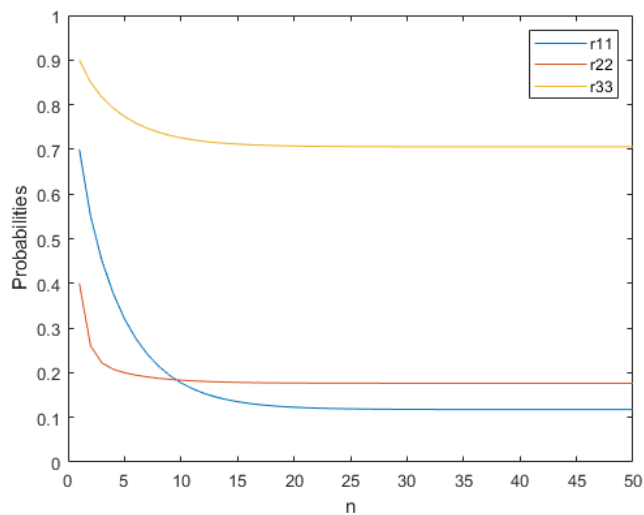
Οι τιμές αυτές της στατικής κατανομής επαληθεύονται και στη Matlab, όπως βλέπουμε παρακάτω.

```
>> pi = asymptotics(categories)

pi =

    0.1176    0.1765    0.7059
```

γ) Οι πιθανότητες $r_{11}(n), r_{22}(n), r_{33}(n)$ για $n = 1, 2, \dots, 50$ φαίνονται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7: Πιθανότητες $r_{11}(n), r_{22}(n), r_{33}(n)$ για $n = 1, 2, \dots, 50$.

Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται το n , τα $r_{11}(n), r_{22}(n), r_{33}(n)$ τείνουν στις στατικές πιθανότητες π_1, π_2, π_3 , αντίστοιχα. Δηλαδή βλέπουμε στην πράξη ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{ij}(n) = \pi_j \quad \forall i, j.$$

Ο κώδικας για το ερώτημα αυτό φαίνεται παρακάτω:

```

r11 = zeros(50,1);
r22 = zeros(50,1);
r33 = zeros(50,1);
Pn = 1;
for n = 1:50
    Pn = Pn*P;
    r11(n) = Pn(1,1);
    r22(n) = Pn(2,2);
    r33(n) = Pn(3,3);
end
figure;
plot(r11)
hold on
plot(r22)
hold on
plot(r33)
legend('r11','r22','r33')
xlabel('n')
ylabel('Probabilities')
ylim([0,1])

```

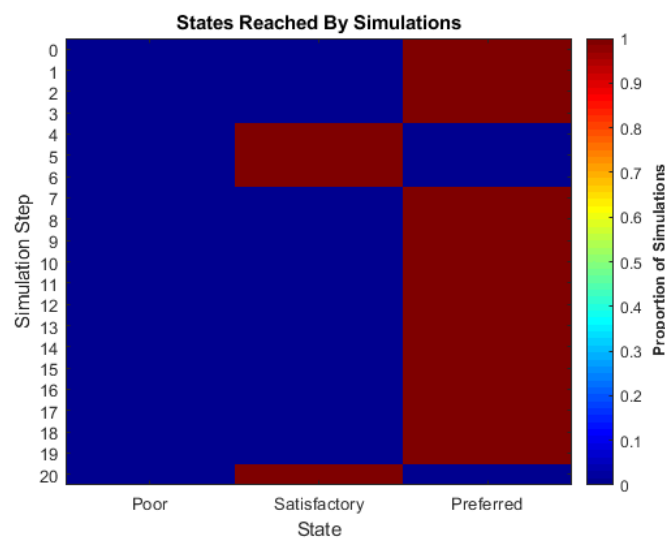
- δ) Προσομοιώνουμε ένα τυχαίο περίπατο 20 βημάτων που ξεκινάει από μια τυχαία κατάσταση χρησιμοποιώντας τον παρακάτω κώδικα:

```

X = simulate(categories,20);
figure;
simplot(categories,X)

```

η οπτικοποίηση του οποίου φαίνεται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8: Τυχαίος περίπατος 20 βημάτων της αλυσίδας, ξεκινώντας από μια τυχαία κατάσταση.