

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2022
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 24/05/2022

Ημερομηνία Παράδοσης: 19/06/2022

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, [εδώ](#). Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων. Μπορείτε, αν προτιμάτε, να χρησιμοποιήσετε προγράμματα τύπου Latex ή Word. Για τις προγραμματιστικές ασκήσεις θα πρέπει να παραδώσετε ό,τι ζητείται στην άσκηση.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1.

Βρισκόμαστε στο σύμπαν 838. Η Στεφανία Πιτσιπά, Ελληνίδα τενίστρια, βρίσκεται στο Νο2 της παγκόσμιας κατάταξης, πίσω μόνο από τη μεγάλη της αντίπαλο, NoVax Djokobic. Οι δύο αθλήτριες έχουν φτάσει στον τελικό ενός Grand Slam, όπου ετοιμάζονται να διασταυρώσουν τις ρακέτες τους για μια ακόμη φορά. Στο σύμπαν 838, οι κανόνες του χωροχρόνου, του τένις, αλλά και οι σωματικές αντοχές των δύο αθλητριών ορίζονται διαφορετικά από το δικό μας σύμπαν. Έτσι, η Στεφανία και η NoVax δύνανται να παίζουν μεγάλο αριθμό από συνεχόμενα σετ για μεγάλο χρονικό διάστημα, πριν η κούραση αρχίσει να τις επηρεάζει. Η Στεφανία, όντας παίχτρια ψυχολογίας, αποδίδει καλύτερα σε ένα σετ αν έχει κερδίσει και στο προηγούμενο σετ, αλλιώς δεν παίζει με ποιότητα. :(Έτσι, αν έχει κερδίσει στα δύο προηγούμενα σετ, τότε κερδίζει και στο επόμενο με πιθανότητα 0.7. Αν έχει χάσει στο προηγούμενο σετ, αλλά έχει κερδίσει στο προ-προηγούμενο, τότε κερδίζει στο επόμενο με πιθανότητα 0.4. Αν έχει κερδίσει στο προηγούμενο σετ, αλλά έχει χάσει στο προ-προηγούμενο, τότε κερδίζει στο επόμενο με πιθανότητα 0.6. Τέλος, αν έχει χάσει και στα δύο προηγούμενα σετ, κερδίζει στο επόμενο με πιθανότητα 0.3. Ανοίγετε την τηλεόρασή σας και πετυχαίνετε τον τελικό, πριν ξεκινήσει το 3ο σετ. Η Στεφανία βρίσκεται μπροστά με 2-0 σετ!

- α') Ορίστε το πρόβλημα που περιγράφει πλήρως την απόδοση της Στεφανίας, με τη βοήθεια Μαρκοβιανής αλυσίδας και χρησιμοποιώντας το μικρότερο δυνατό αριθμό καταστάσεων. Δώστε το σύνολο των καταστάσεων, σχεδιάστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Ποιες από τις καταστάσεις είναι έμμονες και ποιες είναι μεταβατικές;

- β') Με ποια πιθανότητα το πρώτο χαμένο σετ της Στεφανίας θα συνεχιστεί με ένα αμέσως επόμενο χαμένο σετ;
- γ') Ορίζουμε ως W το πλήθος των σετ που έχουν διεξαχθεί μέχρι το πρώτο χαμένο σετ της Στεφανίας (το χαμένο σετ δεν υπολογίζεται σε αυτό το πλήθος). Βρείτε τη σ.π.π. της τ.μ. W .
- δ') Ποια η στατική κατανομή της παραπάνω Μαρκοβιανής;
- ε') Με ποια πιθανότητα η Στεφανία θα κερδίσει το χιλιοστό σετ, δεδομένου ότι τα αποτελέσματα του χιλιοστού και του χιλιοστού πρώτου σετ είναι τα ίδια;
- ς') Ορίζουμε ως G το πλήθος των σετ που έχουν διεξαχθεί μέχρι η Στεφανία να χάσει δύο συνεχόμενα σετ. Υπολογίστε το $E[G]$.
- ζ') Η Στεφανία έχει πάρει την απόφαση να εγκαταλείψει το παιχνίδι αν σε οποιοδήποτε σημείο του τελικού χάσει τρία συνεχόμενα σετ. Αν ορίσουμε ως Y το σύνολο των σετ που θα έχει παίξει έως τότε, υπολογίστε το $E[Y]$.

Άσκηση 2.

Η παρέα σας, σας έχει προτείνει να βγείτε μαζί τους και να παρακολουθήσετε ζωντανά τον αγώνα της ομάδας σας, AFC Richmond, σε κάποια καφετέρια. Ως εναλλακτική, έχετε την επιλογή να μείνετε σπίτι και να παρακολουθήσετε μαζί με το ταίρι σας την αγαπημένη σας σειρά, Bridgerton, συνοδευόμενη από ένα ζεστό φλιτζάνι Yorkshire Tea και English biscuits! Ahhhh... This is the life! Αρχικά, διατηρείτε μία ουδέτερη στάση ως προς το τι θα επιλέξετε να κάνετε. Επειδή, όμως, πρέπει να αποφασίσετε, αρχίζετε και επινοείτε επιχειρήματα για να σας βοηθήσουν να αποφασίσετε. Έτσι:

- Όταν είστε ουδέτερος, ένα επιχείρημα δύναται να μην αλλάξει τη στάση που έχετε προς μία συγκεκριμένη επιλογή και έτσι να παραμείνετε ουδέτερος με πιθανότητα $1/2$. Αλλιώς, ένα επιχείρημα μπορεί να σας οδηγήσει, με ίση πιθανότητα, είτε να αποκτήσετε θετική στάση στο να δείτε τον αγώνα, είτε να αποκτήσετε θετική στάση στο να δείτε Bridgerton, είτε να αποφασίσετε οριστικά να κάνετε ένα από τα δύο (σε αυτήν την περίπτωση σταματάτε να ψάχνετε νέα επιχειρήματα αφού πλέον έχετε πάρει την τελική σας απόφαση).
- Αν βρίσκεστε σε θετική στάση για να παρακολουθήσετε τον αγώνα, ένα επιχείρημα μπορεί να σας πείσει ώστε να αποφασίσετε οριστικά να τον δείτε με πιθανότητα $1/4$. Αλλιώς, με πιθανότητα $3/4$ το επιχείρημα μπορεί να σας οδηγήσει πίσω στο να έχετε ουδέτερη στάση.
- Αν βρίσκεστε σε θετική στάση για να παρακολουθήσετε Bridgerton, ένα επιχείρημα μπορεί να σας πείσει ώστε να αποφασίσετε τελικά να μείνετε σπίτι με πιθανότητα $1/2$. Αλλιώς, με πιθανότητα $1/2$ το επιχείρημα μπορεί να σας οδηγήσει πίσω στο να έχετε ουδέτερη στάση.

(α) Σχεδιάστε το πλήρες γράφημα της παραπάνω Μαρκοβιανής αλυσίδας. Αποφανθείτε ποιες είναι οι μεταβατικές καταστάσεις και ποιες οι καταστάσεις απορροφήσεως.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα να καταλήξετε στην απόφαση να παρακολουθήσετε τον αγώνα με την παρέα σας.

(γ) Βρείτε τον μέσο αριθμό μεταβάσεων έως ότου πάρετε την απόφασή σας.

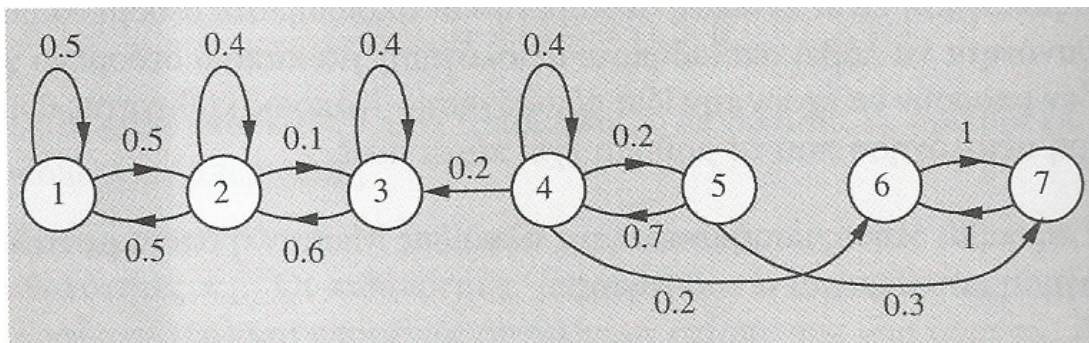
Άσκηση 3.

Αποφασίζετε να δοκιμάσετε την τύχη σας στο καζίνο. Έχετε διάθεση να τινάξετε την μπάνα στον αέρα, επομένως ξεκινάτε με 2 (ολόκληρα) ευρώ και δε σταματάτε να παίζετε αν δε φτάσετε τα 5 ευρώ (always aim for the stars...). Τίθεται, βέβαια, και η περίπτωση να μην κερδίσετε, δηλαδή να μείνετε με 0 ευρώ, αλλά δε σας θέλω απαισιόδοξους! :) Ποντάρετε τα χρήματά σας στη ρουλέτα, η οποία αποτελείται από 17 μαύρους, 17 κόκκινους και 1 πράσινο αριθμό. Πιο συγκεκριμένα, ποντάρετε πάντα στο να τύχει κόκκινος αριθμός, και πάντα 1 ευρώ. Αν όντως τύχει κόκκινος αριθμός, το ποσό που ποντάρατε διπλασιάζεται, ενώ αν όχι το χάνετε.

- α') Ορίστε το πρόβλημα που περιγράφει πλήρως το παραπάνω παιχνίδι, με τη βοήθεια Μαρκοβιανής αλυσίδας. Δώστε το σύνολο των καταστάσεων, σχεδιάστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Ποιες από τις καταστάσεις είναι έμμονες και ποιες είναι μεταβατικές;
- β') Με ποια πιθανότητα θα φύγετε με τα 5 ευρώ στην τσέπη και με ποια έχοντας χάσει και τα 2 αρχικά σας ευρώ;
- γ') Υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό προσπαθειών μέχρι τη λήξη του παιχνιδιού.

Άσκηση 4.

Έστω η παρακάτω αλυσίδα Markov:



- α') Αναγνωρίστε τις έμμονες και τις μεταβατικές καταστάσεις. Επίσης, προσδιορίστε τις κλάσεις επικοινωνίας και βρείτε ποιες από αυτές είναι περιοδικές.
- β') Υπάρχουν στατικές πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1; Εάν ναι, ποιες είναι αυτές;
- γ') Υπάρχουν στατικές πιθανότητες, δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 6; Εάν ναι, ποιες είναι αυτές;
- δ') Υποθέστε ότι η διαδικασία αρχίζει από την κατάσταση 4.
- Για κάθε κλάση επικοινωνίας, προσδιορίστε την πιθανότητα ότι κάποτε φτάνουμε στην κλάση αυτή.
 - Ποιος είναι ο μέσος αριθμός μεταβάσεων μέχρι και συμπεριλαμβανομένης της μετάβασης στην οποία φτάσαμε για πρώτη φορά σε μία κλάση επικοινωνίας;

Άσκηση 5.

Θεωρείστε μία γεννήτρια bits. Η συγκεκριμένη γεννήτρια παράγει επ'άπειρον, ανεξάρτητα και με τυχαίο ισοπίθανο τρόπο αλληλουχία από bits (0 ή 1). Έστω ότι ξεκινάτε να παρακολουθείτε τη γεννήτρια από την έναρξη της λειτουργίας της. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός από bits που θα παραχθούν μέχρι να παρατηρήσετε μία υπο-αλληλουχία της μορφής 010; Λύστε το πρόβλημα αποκλειστικά με τη χρήση Μαρκοβιανών αλυσίδων. Δώστε το σύνολο των καταστάσεων, σχεδιάστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης και απαντήστε στο ερώτημα που έχει τεθεί.

Άσκηση 6.

Υλοποιήστε την Μαρκοβιανή αλυσίδα της Άσκησης 4 προγραμματιστικά, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους θεωρητικούς τύπους, καθώς και έτοιμες συναρτήσεις, βιβλιοθήκες και toolboxes που αφορούν Μαρκοβιανές αλυσίδες. Απαντήστε στα ερωτήματα (δ) (i),(ii) πειραματικά και συγκρίνετε τα αποτελέσματα των πειραμάτων σας με τις θεωρητικές τιμές που έχετε ήδη υπολογίσει στην Άσκηση 4. Ενδεικτικά βήματα είναι τα εξής:

- Ορίστε μία μεταβλητή P ως τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης της αλυσίδας Markov.
- Προσομοιώστε για έναν επαρκή αριθμό από φορές (1000 προσομοιώσεις είναι αρκετές) την Μαρκοβιανή αλυσίδα που έχετε ορίσει. Κάθε προσομοίωση ξεκινά από την αρχική κατάσταση 4 και ολοκληρώνεται έως ότου υπάρξει απορρόφηση από κλάση επικοινωνίας.
Hint: Με τη χρήση της συνάρτησης *rand* μπορείτε να μοντελοποιήσετε την τυχαιότητα μετάβασης από μία κατάσταση s_t σε μία κατάσταση s_{t+1} . Συνδυάζοντας κατάλληλα τις συναρτήσεις *find*, *cumsum*, τη σωστή, κάθε φορά, γραμμή του πίνακα P και το αποτέλεσμα της *rand* θα μπορείτε να αποφανθείτε ποια θα είναι η εκάστοτε κατάσταση s_{t+1} σε κάθε βήμα της προσομοίωσής σας.
- Αξιοποιώντας τη μέθοδο της σχετικής συχνότητας (εκ των υστέρων ορισμός πιθανότητας) υπολογίστε πειραματικά την πιθανότητα να βρεθείτε σε κάποια κλάση επικοινωνίας, στο σύνολο των 1000 προσομοιώσεων.
- Υπολογίστε για κάθε προσομοίωση το πλήθος των μεταβάσεων μέχρι να φτάσετε σε κάποια κλάση επικοινωνίας. Αφού ολοκληρώσετε τις 1000 προσομοιώσεις υπολογίστε τον μέσο όρο των μεταβάσεων.

Προσεγγίζουν οι πειραματικές τιμές που υπολογίσατε τις αντίστοιχες θεωρητικές; Παραθέστε τον κώδικά σας μαζί με τα υπόλοιπα παραδοτέα της σειράς ασκήσεων.