

Άσκηση 1.

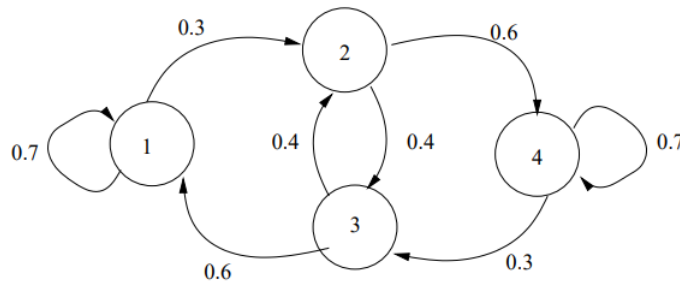
- (α) Μπορούμε να περιγράψουμε την απόδοση της Στεφανίας με Μαρκοβιανή αλυσίδα 4 καταστάσεων όπου οι καταστάσεις είναι της μορφής:

(αποτέλεσμα του προ-προηγούμενου σετ, αποτέλεσμα του προηγούμενου σετ).

Επομένως, αν η Στεφανία έχει κερδίσει τα δύο προηγούμενα σετ θα βρισκόμαστε στην κατάσταση WW (Win, Win), αν έχει χάσει τα δύο προηγούμενα σετ, στην κατάσταση LL (Lose, Lose) και πάει λέγοντας. Το σύνολο καταστάσεων είναι:

$$\{1 \text{ (WW)}, 2 \text{ (WL)}, 3 \text{ (LW)}, 4 \text{ (LL)}\}.$$

Το γράφημα της αλυσίδας είναι το εξής:



Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = [p_{ij}]_{4 \times 4}$$

Όλες οι καταστάσεις είναι έμμονες.

- (β) Η Στεφανία βρίσκεται συνεχώς στην κατάσταση 1 (WW), μέχρι να χάσει το πρώτο της σετ. Επομένως, όταν χάσει το πρώτο της σετ θα βρίσκεται στην κατάσταση 2 (WL). Άρα, η πιθανότητα που ζητείται είναι αυτή της μετάβασης από την κατάσταση 2 (WL) στην κατάσταση 4 (LL), δηλαδή 0.6.

(γ) Η τ.μ. W παίρνει τιμές $w = 2, 3, 4, \dots$ Έστω X_n το αποτέλεσμα του n -οστού σετ. Έχουμε:

$$p_W(w) = P(X_{w+1} = \text{Lose}, X_w = X_{w-1} = \dots = X_3 = \text{Win} | X_2 = X_1 = \text{Win}) = p_{11}^{w-2} \cdot p_{12} = 0.7^{w-2} \cdot 0.3$$

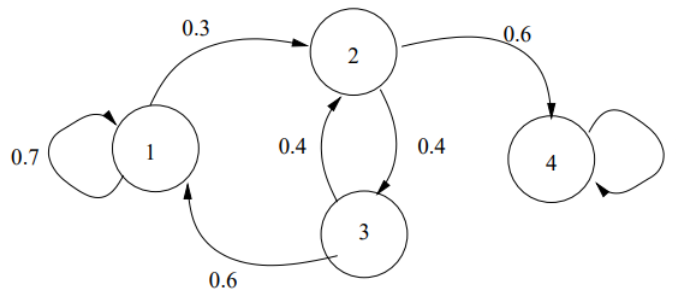
(δ) Είναι προφανές από το γράφημα ότι η αλυσίδα αποτελείται από μια απεριοδική κλάση επικοινωνίας και επομένως υπάρχει η στατική κατανομή. Λύνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας $\pi = \pi \cdot P$ και $\sum_{i=1}^4 \pi_i = 1$, έχουμε:

$$[\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4] = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$$

(ε) Έστω X_n το αποτέλεσμα του n -οστού σετ. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P[X_{1000} = \text{Win} | X_{1000} = X_{1001}] &= \frac{P[X_{1000} = \text{Win} = X_{1001}]}{P[X_{1000} = X_{1001}]} = \\ &= \frac{P[X_{1000} = \text{Win} = X_{1001}]}{P[X_{1000} = X_{1001} = \text{Win}] + P[X_{1000} = X_{1001} = \text{Lose}]} = \frac{\pi_1}{\pi_1 + \pi_4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(στ) Για να βρούμε το $E[G]$ πρέπει να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο (μέσο πλήθος βημάτων) μέχρι την πρώτη επίσκεψη στην κατάσταση 4 (LL) ξεκινώντας από την κατάσταση 1 (WW). Επίσης, σε αυτήν την ποσότητα θα πρέπει να προσθέσουμε 2 ακόμη σετ, αφού στην αρχική κατάσταση 1 έχουν ήδη παιχτεί 2 σετ σύμφωνα και με την εκφώνηση. Ορίζουμε ως $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ τους μέσους χρόνους έως την πρώτη επίσκεψη στην 4, ξεκινώντας από τις καταστάσεις 1, 2, 3, 4 αντίστοιχα. Επομένως, $E[G] = \mu_1 + 2$ και επικεντρωνόμαστε σε μία παραπλήσια μαρκοβιανή αλυσίδα όπου η κατάσταση 4 είναι μια κατάσταση απορροφής (βλ. το παρακάτω σχήμα).



Το σετ των γραμμικών εξισώσεων που πρέπει να λύσουμε είναι:

$$\mu_1 = 1 + 0.7\mu_1 + 0.3\mu_2$$

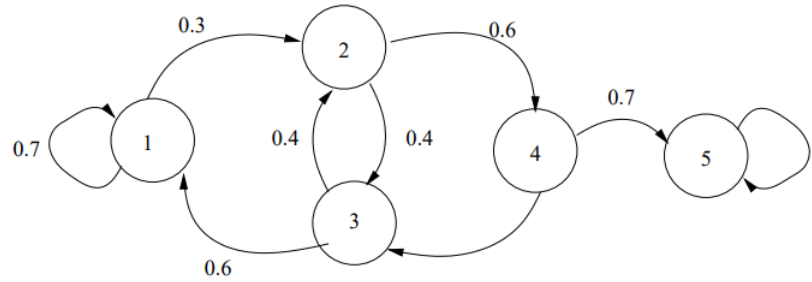
$$\mu_2 = 1 + 0.4\mu_3 + 0.6\mu_4$$

$$\mu_3 = 1 + 0.6\mu_1 + 0.4\mu_2$$

$$\mu_4 = 0$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων παίρνουμε $\mu_1 = 7$ και επομένως $E[G] = 9$.

- (ζ) Τρία συνεχόμενα χαμένα σετ θα προκύψουν μόνο όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση 4 (LL). Έτσι, δημιουργούμε μία πέμπτη κατάσταση 5 (LLL), οπότε προκύπτει η Μαρκοβιανή αλυσίδα με το παρακάτω γράφημα και τον παρακάτω πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:



$$P = [p_{ij}]_{5 \times 5} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αντίστοιχα με το προηγούμενο ερώτημα, για να βρούμε το $E[Y]$ πρέπει να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο (μέσο πλήθος βημάτων) μέχρι την πρώτη επίσκεψη στην κατάσταση 5 (LLL) ξεκινώντας από την κατάσταση 1 (WW). Πάλι σε αυτήν την ποσότητα θα πρέπει να προσθέσουμε 2 ακόμη σετ, αφού στην αρχική κατάσταση 1 έχουν ήδη παιχτεί 2 σετ σύμφωνα και με την εκφώνηση. Επομένως, $E[Y] = \mu_1 + 2$, που προκύπτει λύνοντας το σετ των παρακάτω γραμμικών εξισώσεων:

$$\mu_1 = 1 + 0.7\mu_1 + 0.3\mu_2$$

$$\mu_2 = 1 + 0.4\mu_3 + 0.6\mu_4$$

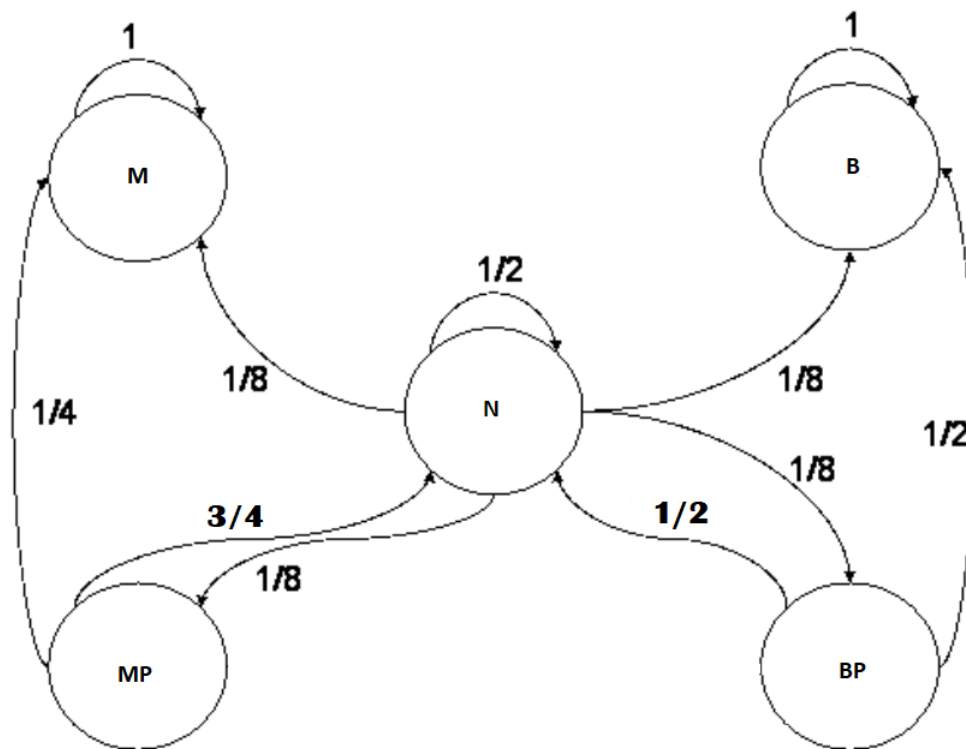
$$\mu_3 = 1 + 0.6\mu_1 + 0.4\mu_2$$

$$\mu_4 = 1 + 0.3\mu_3 + 0.7\mu_5$$

$$\mu_5 = 0$$

Άσκηση 2.

- (α) Το διάγραμμα καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας ακολουθεί στην επόμενη σελίδα. Οι καταστάσεις N (Neutral), MP (Match Positive) και BP (Bridgerton Positive) είναι μεταβατικές, ενώ οι M (Match) και B (Bridgerton) είναι απορροφητικές, διότι δεν υπάρχει επιστροφή από αυτές.



- (β) Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης από την κατάσταση M. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

$$\begin{aligned}
 a_M &= 1 \\
 a_B &= 0 \\
 a_N &= \frac{1}{2}a_N + \frac{1}{8}a_M + \frac{1}{8}a_B + \frac{1}{8}a_{MP} + \frac{1}{8}a_{BP} \\
 a_{MP} &= \frac{1}{4}a_M + \frac{3}{4}a_N \\
 a_{BP} &= \frac{1}{2}a_B + \frac{1}{2}a_N
 \end{aligned}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων, και γνωρίζοντας ότι ξεκινήσαμε από την κατάσταση N, έχουμε:

$$a_N = \frac{5}{11} \approx 0.455$$

- (γ) Ο ζητούμενος μέσος αριθμός μεταβάσεων αντιστοιχεί στον αναμενόμενο χρόνο μέχρι την απορρόφηση για την μεταβατική κατάσταση N. Από τη θεωρία έχουμε:

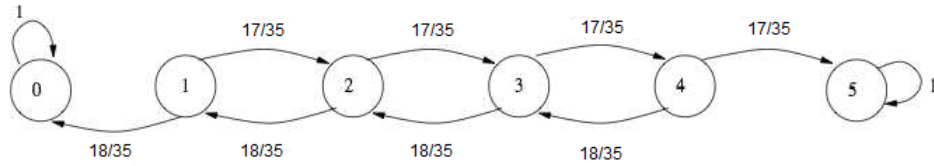
$$\begin{aligned}
 \mu_M &= 0 \\
 \mu_B &= 0 \\
 \mu_N &= 1 + \frac{1}{2}\mu_N + \frac{1}{8}\mu_M + \frac{1}{8}\mu_B + \frac{1}{8}\mu_{MP} + \frac{1}{8}\mu_{BP} \\
 \mu_{MP} &= 1 + \frac{1}{4}\mu_M + \frac{3}{4}\mu_N \\
 \mu_{BP} &= 1 + \frac{1}{2}\mu_B + \frac{1}{2}\mu_N
 \end{aligned}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων παίρνουμε:

$$\mu_N = \frac{40}{11} \approx 3.636$$

Άσκηση 3.

α') Ως κατάσταση του συστήματος ορίζουμε τον αριθμό των ευρώ που μπορεί να έχετε στην τσέπη σας, αρχικά και μετά από κάθε ποντάρισμα, δηλαδή $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Το γράφημα της αλυσίδας είναι το εξής:



Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι ο ακόλουθος:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{18}{35} & 0 & \frac{17}{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{18}{35} & 0 & \frac{17}{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{18}{35} & 0 & \frac{17}{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{18}{35} & 0 & \frac{17}{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Έμμονες καταστάσεις: 0 και 5.
- Μεταβατικές καταστάσεις: 1, 2, 3 και 4.

β') Ζητούνται, ουσιαστικά, οι πιθανότητες απορρόφησης του συστήματος από τις καταστάσεις $s = 0$ (φεύγετε χαμένος) και $s = 5$ (φεύγετε κερδισμένος), όταν αυτό ξεκινά από την κατάσταση $i = 2$. Για την περίπτωση να φύγετε χαμένος, πρέπει να βρούμε τις πιθανότητες απορρόφησης από την κατάσταση 0, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_5 &= 0 \\ \alpha_1 &= p_{10} \cdot \alpha_0 + p_{12} \cdot \alpha_2 = \frac{18}{35} \cdot 1 + \frac{17}{35} \cdot \alpha_2 \\ \alpha_2 &= p_{21} \cdot \alpha_1 + p_{23} \cdot \alpha_3 = \frac{18}{35} \cdot \alpha_1 + \frac{17}{35} \cdot \alpha_3 \\ \alpha_3 &= p_{32} \cdot \alpha_2 + p_{34} \cdot \alpha_4 = \frac{18}{35} \cdot \alpha_2 + \frac{17}{35} \cdot \alpha_4 \\ \alpha_4 &= p_{43} \cdot \alpha_3 + p_{45} \cdot \alpha_5 = \frac{18}{35} \cdot \alpha_3 + \frac{17}{35} \cdot 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8222 \\ 0.6339 \\ 0.4346 \\ 0.2235 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η πιθανότητα, λοιπόν, να φύγετε χαμένος από το καζίνο, ενώ έχετε μπει με 2 ευρώ, είναι $\alpha_2 = 0.6339$.

Με αντίστοιχο τρόπο μπορείτε να υπολογίσετε την πιθανότητα να φύγετε χαρούμενος υπολογίζοντας την πιθανότητα απορρόφησης του συστήματος από την $s = 5$.

Υ') Ζητείται ο μέσος χρόνος απορρόφησης του συστήματος, ξεκινώντας από την κατάσταση $i = 2$. Άρα:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \mu_5 = 0 \\ \mu_1 &= 1 + p_{10} \cdot \mu_0 + p_{12} \cdot \mu_2 = 1 + \frac{18}{35} \cdot 0 + \frac{17}{35} \cdot \mu_2 \\ \mu_2 &= 1 + p_{21} \cdot \mu_1 + p_{23} \cdot \mu_3 = 1 + \frac{18}{35} \cdot \mu_1 + \frac{17}{35} \cdot \mu_3 \\ \mu_3 &= 1 + p_{32} \cdot \mu_2 + p_{34} \cdot \mu_4 = 1 + \frac{18}{35} \cdot \mu_2 + \frac{17}{35} \cdot \mu_4 \\ \mu_4 &= 1 + p_{43} \cdot \mu_3 + p_{45} \cdot \mu_5 = 1 + \frac{18}{35} \cdot \mu_3 + \frac{18}{38} \cdot 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι $\mu_2 \approx 5.935$.

Άσκηση 4.

α') Οι καταστάσεις 4 και 5 είναι μεταβατικές και όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι έμμονες. Υπάρχουν δύο κλάσεις επικοινωνίας. Η κλάση $\{1, 2, 3\}$ είναι απεριοδική και η κλάση $\{6, 7\}$ είναι περιοδική.

β') Αν η διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση 1, μένει μέσα στην απεριοδική κλάση $\{1, 2, 3\}$ και οι πιθανότητες n -οστής μετάβασης συγκλίνουν στις στατικές πιθανότητες π_i . Έχουμε $\pi_i = 0$ για $i \notin \{1, 2, 3\}$. Οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\pi_1 = \pi_2, \quad \pi_2 = 6\pi_3.$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις σε συνδυασμό με την εξίσωση κανονικοποίησης, έχουμε:

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{6}{13}, \quad \pi_3 = \frac{1}{13}.$$

γ') Επειδή η κλάση $\{6, 7\}$ είναι περιοδική, δεν υπάρχουν στατικές πιθανότητες.

- δ') i) Έστω α_4 και α_5 οι πιθανότητες απορρόφσεως από την κλάση $\{1, 2, 3\}$, ξεκινώντας από την κατάσταση 4 και 5 αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\alpha_4 = 0.2 + 0.4\alpha_4 + 0.2\alpha_5$$

$$\alpha_5 = 0.7\alpha_4$$

που δίδει:

$$\alpha_4 = 0.2 + 0.4\alpha_4 + 0.14\alpha_4$$

και $\alpha_4 = \frac{10}{23}$. Επίσης, η πιθανότητα ότι κάποτε φτάνουμε στην κλάση $\{6, 7\}$, ξεκινώντας από την κατάσταση 4 είναι $1 - (\frac{10}{23}) = \frac{13}{23}$.

- ii) Έστω μ_4 και μ_5 οι αναμενόμενοι χρόνοι μέχρι να φτάσουμε σε μια επαναληπτική κατάσταση, ξεκινώντας από την κατάσταση 4 και 5 αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\mu_4 = 1 + 0.4\mu_4 + 0.2\mu_5$$

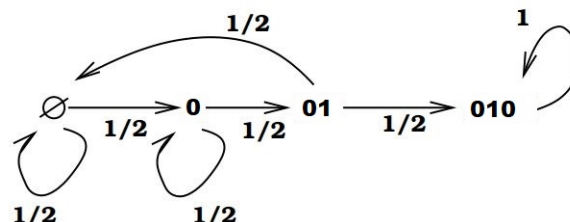
$$\mu_5 = 1 + 0.7\mu_4$$

Συμπληρώνοντας τη δεύτερη εξίσωση στην πρώτη και λύνοντας ως προς μ_4 , παίρνουμε:

$$\mu_4 = \frac{60}{23}.$$

Άσκηση 5.

Θεωρούμε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία ξεκινάει από μία αρχική κενή κατάσταση ($\emptyset$) (δεν έχει ξεκινήσει η γεννήτρια να παράγει bits) και επιθυμούμε να καταλήξει σε μία κατάσταση απορρόφσεως με όνομα 010. Αν το επόμενο bit είναι 0, τότε από την κενή κατάσταση μεταβαίνουμε σε μία κατάσταση με το όνομα 0, αφού έχουμε πετύχει το πρώτο στοιχείο της αλληλουχίας. Αλλιώς, αν είναι 1, τότε παραμένουμε στην κατάσταση $\emptyset$. Όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση 0 και το επόμενο bit είναι 1, τότε μεταβαίνουμε σε μία κατάσταση με όνομα 01, αφού έχουμε πετύχει και το δεύτερο στοιχείο της αλληλουχίας. Αλλιώς, αν το bit είναι 0, τότε η αλληλουχία μας έχει εν μέρει χαλάσει, παραμένοντας όμως στην κατάσταση 0 και κάνοντας μία νέα αρχή στην προσπάθεια επίτευξης του στόχου μας. Τέλος, όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση 01, είτε το επόμενο bit θα είναι 0 και θα καταλήξουμε στην κατάσταση απορρόφσεως 010, έχοντας πετύχει τον στόχο μας, είτε θα είναι 1, πράγμα που θα μας οδηγήσει πίσω στην κατάσταση $\emptyset$, αφού η αλληλουχία που θέλουμε θα έχει τελείως χαλάσει και θα πρέπει να ξεκινήσουμε από την αρχή. Ακολουθεί το διάγραμμα μεταβάσεων παρακάτω:



Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε τον αναμενόμενο αριθμό από bits που ζητείται, λύνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\mu_{\emptyset} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mu_{\emptyset} + \frac{1}{2} \cdot \mu_0$$

$$\mu_0 = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mu_0 + \frac{1}{2} \cdot \mu_{01}$$

$$\mu_{01} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \mu_{\emptyset} + \frac{1}{2} \cdot \mu_{010}$$

$$\mu_{010} = 0$$

Τελικά: $\mu_{\emptyset} = 10$.