

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2022

Φροντιστήριο 3

Άσκηση 1

Είστε ένα φτωχός και μόνος Jedi που καταζητείται από την Αυτοκρατορία για υποκίνηση εξεγέρσεων ενάντια της. Μία ομάδα από Stormtroopers ανακαλύπτει το καταφύγιό σας και σας στήνει ενέδρα. Κάνοντας κίνηση για να πιάσετε το φωτόσπαθό σας, συνειδητοποιείτε ότι αυτό λείπει! Θυμάστε ότι το χθεσινό βράδυ το χάσατε σε μια παρτίδα Gwent από έναν ασπρομάλη μυστήριο τύπο, με μενταγιόν στο σχήμα κεφαλής λύκου και με διακαή πόθο να προσθέσει άλλο ένα σπαθί στην πλούσια συλλογή του! Φευ! Οι Stormtroopers ανοίγουν πυρ! Αποφασίζετε ότι ο πιο πιθανός τρόπος να ξεφύγετε είναι να τρέξετε γρήγορα προς την έξοδο, στην οποία μπορείτε να φτάσετε μέσα σε 1 λεπτό. Κάθε δευτερόλεπτο η πιθανότητα να σας πετύχει κάποιο από τα πυρά των Stormtroopers είναι $p = 0.01$ (ανεξάρτητα από δευτερόλεπτο σε δευτερόλεπτο).

- α') Βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου μέχρι να σας πετύχει κάποιος από τους Stormtroopers για πρώτη φορά.
- β') Προτού επιλέξετε να ακολουθήσετε την παραπάνω τακτική, θυμηθήκατε με δάκρυα συγκίνησης στα μάτια εκείνο το εξάμηνο που είχατε παρακολουθήσει το μάθημα των Εφαρμοσμένων Στοχαστικών Διαδικασιών, όταν ήσασταν ακόμα ένα ξέγνοιαστος και φιλόδοξος Padawan. Η πιο σωστή απόφαση της ζωής σας! Κάνοντας, λοιπόν, έναν πρόχειρο υπολογισμό στο μυαλό σας, συνειδητοποιήσατε ότι όντως με αυτήν την τακτική θα γλιτώνατε εύκολα από τους Stormtroopers. Ποιος είναι ο υπολογισμός που κάνατε που σας οδήγησε σε αυτήν την απόφαση;
- γ') Τα πρώτα 20 δευτερόλεπτα δε σας έχει πετύχει ακόμη κανένας Stormtrooper. Ποια είναι τώρα η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι αυτό να συμβεί (μετρώντας από $t = 20$).

Λύση.

- α') Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια στοχαστική διαδικασία $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητων τ.μ. Bernoulli με κάθε δοκιμή X_i να αποτελεί το γεγονός ότι τα πυρά των Stormtroopers σας πετυχαίνουν με πιθανότητα p :

$$p_{X_i}(x) = \begin{cases} 0.01, & x = 1 \\ 0.99, & x = 0 \end{cases}$$

Ο χρόνος T μέχρι την πρώτη επιτυχία σε μια στοχαστική διαδικασία Bernoulli μοντελοποιείται ως μια Γεωμετρική τ.μ. με παράμετρο p , άρα η ζητούμενη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι Γεωμετρική με $p = 0.01$:

$$p_T(t) = \begin{cases} (1-p)^{t-1} \cdot p = (1-0.01)^{t-1} \cdot 0.01 = (0.99)^{t-1} \cdot 0.01, & t \geq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- β') Η μέση τιμή της Γεωμετρικής με παράμετρο p είναι $\frac{1}{p}$, επομένως ο μέσος χρόνος μέχρι να σας πετύχουν τα πυρά για πρώτη φορά θα είναι $\frac{1}{0.01} = 100$ δευτερόλεπτα. Έχοντας στο μυαλό σας ότι η έξοδος απέχει μόλις 1 λεπτό = 60 δευτερόλεπτα, θεωρήσατε ότι θα καταφέρατε να ξεφύγετε προτού σας πετύχουν οι Stormtroopers.
- γ') Επειδή η διαδικασία Bernoulli δεν έχει μνήμη, δεν έχει σημασία αν σας πέτυχε ή όχι κάποιος Stormtrooper το 1ο δευτερόλεπτο, το 2ο, το 20ο ή το 200ο. Επομένως, η μέση τιμή του χρόνου μετρώντας από τη στιγμή $t = 20$ θα είναι και πάλι $\frac{1}{0.01} = 100$ δευτερόλεπτα.

Άσκηση 2

Ένας υπολογιστής εξυπηρετεί προγράμματα που καταθέτουν δύο χρήστες. Ο χρόνος χωρίζεται σε χρονικές σχισμές (time slots). Μία χρονική σχισμή μπορεί να είναι ανενεργή με πιθανότητα $p_I = 1/6$ και ενεργή με πιθανότητα $p_B = 5/6$. Κατά τη διάρκεια μιας ενεργούς σχισμής, υπάρχει πιθανότητα $p_{1/B} = 2/5$ (αντίστοιχα, $p_{2/B} = 3/5$) ότι εκτελείται ένα πρόγραμμα από το χρήστη 1 (αντίστοιχα, από το χρήστη 2). Υποθέτουμε ότι γεγονότα που συνδέονται με διαφορετικές χρονικές σχισμές είναι ανεξάρτητα.

- (α) Βρείτε την πιθανότητα ότι ένα πρόγραμμα από το χρήστη 1 εκτελείται για πρώτη φορά κατά τη διάρκεια της 4ης χρονικής σχισμής.
- (β) Δεδομένου ότι ακριβώς 5 από τις 10 πρώτες χρονικές σχισμές ήταν ανενεργές, βρείτε την πιθανότητα ότι η 6η ανενεργή χρονική σχισμή είναι η σχισμή 12.
- (γ) Βρείτε το μέσο αριθμό των χρονικών σχισμών μέχρι και συμπεριλαμβανόμενης της σχισμής του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1.
- (δ) Βρείτε το μέσο αριθμό των *ενεργών* χρονικών σχισμών μέχρι και συμπεριλαμβανόμενης της σχισμής του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1.
- (ε) Βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας, μέση τιμή και διασπορά του αριθμού των προγραμμάτων από το χρήστη 2 μέχρι την υποβολή του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1.

Λύση

(α) Κατά τη διάρκεια κάθε χρονικής σχισμής, η πιθανότητα εκτέλεσης ενός προγράμματος από το χρήστη 1 είναι $p_1 = p_{1/B} \cdot p_B = (2/5) \cdot (5/6) = 1/3$. Η εκτέλεση προγραμμάτων από το χρήστη 1 αποτελεί διαδικασία Bernoulli, με παράμετρο p_1 , συνεπώς:

$$P(1\text{η εκτέλεση προγράμματος από το χρήστη 1 κατά την 4η χρονική σχισμή}) = p_1(1-p_1)^3 = 0.0988.$$

(β) Ουσιαστικά, ζητείται η πιθανότητα η χρονική σχισμή 11 να είναι ενεργή και η 12 να είναι ανενεργή (καθώς οι 5 από τις 10 πρώτες χρονικές σχισμές ήταν ανενεργές). Εφόσον τα γεγονότα που συνδέονται με διαφορετικές χρονικές σχισμές είναι ανεξάρτητα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$p_B \cdot p_I = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0.1389.$$

(γ) Σε κάθε χρονική σχισμή εκτελείται πρόγραμμα από το χρήστη 1 με πιθανότητα $p_1 = 1/3$, ανεξαρτήτως του τι συμβαίνει στις υπόλοιπες σχισμές. Η χρονική στιγμή εκτέλεσης του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1 είναι Pascal τυχαία μεταβλητή τάξης 5, με παράμετρο $p_1 = 1/3$ και άρα, ο ζητούμενος μέσος αριθμός χρονικών σχισμών είναι ίσος με τη μέση τιμή της Pascal τ.μ., δηλ.

$$\frac{5}{p_1} = \frac{5}{1/3} = 15.$$

(δ) Σε κάθε ενεργή χρονική σχισμή εκτελείται πρόγραμμα από το χρήστη 1 με πιθανότητα $p_{1|B} = 2/5$, ανεξαρτήτως του τι συμβαίνει στις υπόλοιπες σχισμές. Η ζητούμενη τ.μ. είναι Pascal τ.μ. τάξης 5, με παράμετρο $p_{1|B} = 2/5$ και άρα, ο ζητούμενος μέσος αριθμός χρονικών σχισμών είναι ίσος με τη μέση τιμή της τ.μ., δηλ.

$$\frac{5}{p_{1|B}} = \frac{5}{2/5} = \frac{25}{2} = 12.5.$$

(ε) Ο αριθμός T των προγραμμάτων από το χρήστη 2 μέχρι την υποβολή του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1 είναι ίσος με τον αριθμό B των ενεργών σχισμών μέχρι την εκτέλεση του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1, μειωμένο κατά 5. Ο αριθμός των ενεργών σχισμών (“δοκιμές”) μέχρι το 5ο πρόγραμμα του χρήστη 1 (“επιτυχία”) είναι μία Pascal τ.μ. τάξης 5, με παράμετρο $p_{1|B} = 2/5$ και άρα

$$p_B(t) = \binom{t-1}{4} \left(\frac{2}{5}\right)^5 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{t-5}, \quad t = 5, 6, \dots$$

Εφόσον $T = B - 5$, ισχύει ότι $p_T(t) = p_B(t+5)$ και άρα

$$p_T(t) = \binom{t+4}{4} \left(\frac{2}{5}\right)^5 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^t, \quad t = 0, 1, \dots$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους της μέσης τιμής και της διασποράς της Pascal τ.μ. B , παίρνουμε τελικά

$$E[T] = E[B] - 5 = \frac{25}{2} - 5 = 7.5$$

και

$$\text{var}(T) = \text{var}(B) = \frac{5(1 - (2/5))}{(2/5)^2}$$

Άσκηση 3

Χρησιμοποιούμε λαμπτήρες για να φωτίσουμε ένα δωμάτιο, ξεκινώντας την στιγμή $t = 0$. Οι λαμπτήρες αντικαθίστανται αμέσως μετά την εξάντληση της διάρκειας ζωής τους. Κάθε νέος λαμπτήρας επιλέγεται ανεξάρτητα, με ίση πιθανότητα μεταξύ ενός λαμπτήρα τύπου A και ενός λαμπτήρα τύπου

B. Ο χρόνος ζωής X οποιουδήποτε λαμπτήρα, οποιουδήποτε τύπου, είναι μία τυχαία ανεξάρτητη μεταβλητή.

$$\text{Για τους λαμπτήρες τύπου A: } f_x(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\text{Για τους λαμπτήρες τύπου B: } f_x(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- α') Να βρείτε τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι να καεί ο πρώτος λαμπτήρας.
- β') Να βρείτε την πιθανότητα να μην καεί κανένας λαμπτήρας πριν την στιγμή t .
- γ') Δεδομένου ότι δεν έχει καεί κανένας λαμπτήρας μέχρι την στιγμή t , ποια είναι η πιθανότητα ο πρώτος λαμπτήρας που χρησιμοποιείται να είναι τύπου A;
- δ') Να βρείτε τη διακύμανση του χρόνου μέχρι να καεί ο πρώτος λαμπτήρας.
- ε') Να βρείτε την πιθανότητα η εξάντληση ζωής του 12ου λαμπτήρα να είναι επίσης η 4η εξάντληση ζωής λαμπτήρα τύπου A.

Λύση

- α') Έστω X ο χρόνος μέχρι να καεί ο πρώτος λαμπτήρας.
Έστω A το γεγονός ο πρώτος λαμπτήρας να είναι τύπου A και B το γεγονός ο πρώτος λαμπτήρας να είναι τύπου B.
Οι δύο τύποι λαμπτήρων έχουν ίση πιθανότητα, οπότε:

$$E[X] = E[X|A]P(A) + E[X|B]P(B) = 1 * \frac{1}{2} + \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

- β') Έστω D το γεγονός να μην καεί κανένας λαμπτήρας πριν την στιγμή t . Έχουμε:

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) = \frac{1}{2} \frac{t^0 e^{-t}}{0!} + \frac{1}{2} \frac{(3t)^0 e^{-3t}}{0!} = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t}$$

- γ') Ψάχνουμε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|D)$.

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{2} e^{-t}}{\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t}} = \frac{1}{1 + e^{-2t}}$$

- δ')

$$E[X^2] = E[X^2|A]P(A) + E[X^2|B]P(B)$$

Αρχικά βρίσκουμε το $E[X^2]$. Ισχύει ότι η δεύτερη στιγμή μίας εκθετικής μεταβλητής T με παράμετρο λ είναι $E[T^2] = E[T]^2 + \text{var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$. Άρα,

$$E[X^2] = E[X^2|A]P(A) + E[X^2|B]P(B) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{9}$$

Από το ερώτημα (α) ξέρουμε ότι $E[X] = \frac{2}{3}$. Επομένως:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{10}{9} - \frac{2^2}{3^2} = \frac{2}{3}$$

ε') Αυτή είναι η πιθανότητα από τις πρώτες 11 λάμπες οι 3 να είναι τύπου A και η 12η να είναι επίσης τύπου A.

$$\binom{11}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \binom{11}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

Άσκηση 4

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών σε ένα βιβλίο ανά σελίδα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Ένα βιβλίο με 200 σελίδες έχει 40 τυπογραφικά λάθη.

- α') Αν επιλέξουμε 10 σελίδες από το παραπάνω βιβλίο, να βρεθεί η πιθανότητα να μην έχουν τυπογραφικά λάθη.
- β') Χωρίζουμε το βιβλίο σε 20 'πακέτα' των 10 σελίδων. Ποιος θα είναι ο αναμενόμενος αριθμός 10σέλιδων από το παραπάνω βιβλίο, που δεν θα έχουν κανένα τυπογραφικό λάθος;
- γ') Ποιά είναι η πιθανότητα από 10 τυχαίες σελίδες του βιβλίου να υπάρχουν ακριβώς 3 χωρίς λάθος;

Λύση

α') Ο ρυθμός των λαθών είναι

$$\lambda = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}.$$

Έστω η τυχαία μεταβλητή X η οποία μετράει τα τυπογραφικά λάθη ανά 10 σελίδες. Γνωρίζουμε ότι η τ.μ $X \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot 10)$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P_X(0) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = 0.135$.

β') Βλέπουμε τα 10σέλιδα σαν μια διαδικασία αφίξεων *Bernoulli* με παράμετρο $p = 0.135$. Δηλαδή έχουμε 'αφίξη' αν δεν υπάρχει τυπογραφικό λάθος. Το διάστημα αφίξεων είναι 20, και επομένως ο μέσος αριθμός αφίξεων είναι $20 \cdot p = 2.7$.

γ') Έστω Y τα λάθη σε μια σελίδα. Η πιθανότητα να υπάρχουν 0 λάθη σε μία σελίδα είναι:

$$P_Y(0) = \frac{0.2^0 \cdot e^{-0.2}}{0!} = e^{-0.2}$$

Αν τώρα έχουμε δέκα σελίδες, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε μια διαδικασία *Bernoulli* με $p = e^{-0.2}$ και μήκος 10. Η πιθανότητα να έχουμε 3 'αφίξεις',

$$\binom{10}{3} (e^{-0.2})^3 (1 - e^{-0.2})^7$$