

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
9 Απριλίου 2022 - Διάρκεια: 2.5 Ωρες

Θέμα 1 - 30 μονάδες: Ροπογεννήτριες και αθροίσματα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.

Το πλήθος των φορτίων που πακετάρονται σε μία αποστολή ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ . Το βάρος κάθε φορτίου είναι ανεξάρτητο από το βάρος οποιουδήποτε άλλου και είναι ομοιόμορφα κατανομημένο μεταξύ 100 και 200 κιλών. Ορίζουμε την τ.μ. X_i ως το ποσοστό κατά το οποίο το i -στό φορτίο ξεπερνά τα 100 κιλά. Π.χ. αν το 5ο φορτίο έχει βάρος 167 κιλά, τότε $X_5 = 0.67$. Έστω Y το άθροισμα όλων των X_i .

(α) Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. Y ;

(β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y .

(γ) Επαληθεύστε την απάντησή σας στο (α) χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y που υπολογίσατε στο (β).

Θέμα 2 - 30 μονάδες: Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Σωματίδιο κινείται στον άξονα των x ως εξής: Ανά μονάδα χρόνου πραγματοποιεί βήμα μήκους μιας μονάδας ή μένει ακίνητο στη θέση που βρίσκεται. Η πιθανότητα να κινηθεί ένα βήμα δεξιά είναι $p = 0.45$, η πιθανότητα να παραμείνει ακίνητο είναι $q = 0.1$ και η πιθανότητα να κινηθεί ένα βήμα αριστερά είναι $r = 0.45$. Το σωματίδιο ξεκινά από τη θέση 0 του άξονα των x .

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα κατά την 20η χρονική μονάδα (δηλαδή μετά από 20 clicks του ρολογιού) το σωματίδιο να βρίσκεται στο διάστημα $[-6, 6]$. Δώστε την απάντησή σας συναρτήσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(a)$.

(β) Να υπολογισθεί η πιθανότητα p_n το σωματίδιο να βρεθεί στο διάστημα $[-6, 6]$ μετά από n χρονικές μονάδες. Ποιο το όριο της p_n καθώς το n τείνει στο άπειρο;

Βοήθεια. Εκφράστε τη θέση, Y_n , του σωματιδίου μετά από n χρονικές μονάδες ως ένα άθροισμα ανεξάρτητων και όμοια κατανομημένων τυχαίων μεταβλητών, X_i .

Θέμα 3 - 40 μονάδες: Poisson αφίξεις. Πακέτα πληροφορίας καταφτάνουν σε έναν κόμβο του δικτύου σύμφωνα με μία στοχαστική διαδικασία Poisson με ένταση 1500 πακέτα το δευτερόλεπτο.

(α) Ποια είναι η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι την άφιξη του 10000-στού πακέτου;

(β) Ποιο είναι το μέσο πλήθος των πακέτων που φτάνουν στον κόμβο μεταξύ 06:50 και 07:00;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι ακριβώς 10 πακέτα φτάνουν στον κόμβο στη διάρκεια 0.01 δευτερολέπων;

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ της άφιξης του 1000-στού και του 1001-στού πακέτου είναι μεγαλύτερο από 0.0005 δευτερόλεπτα;

(ε) Ποια είναι η πιθανότητα ότι κανένα πακέτο δεν φτάνει τα πρώτα 0.001 δευτερόλεπτα κάθε μέρας στη διάρκεια μίας εβδομάδας;