ΗΥ-317 Πρόοδος - Λύσεις

9-4-2022

ΘΕΜΑ 1ο Έστω N το πλήθος των φορτίων σε μία αποστολή.

Μας δίδεται ότι $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Συνεπώς,

- $P_N(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
- $E[N] = \lambda$, $var(N) = \lambda$
- $M_N(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}$

Επίσης, μας δίδεται ότι X_i είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τ.μ. που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a, b] = [0, 1]$: $X_i \sim U[0, 1]$. Συνεπώς,

- $f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$
- $E[X_i] = \mu_X = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$, $E[X_i^2] = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} = \frac{1}{3}$
- $var(X_i) = \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}$
- $M_{X_i}(s) = \frac{1}{b-a} \frac{e^{sb} - e^{sa}}{s} = \frac{e^s - 1}{s}$

(α) Η τ.μ. $Y = X_1 + \ldots + X_N$ είναι το άθροισμα ενός τυχαίου αριθμού, N, τ.μ. X_i όπου $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ και $X_i \sim U[0, 1]$.

Συνεπώς, $E[Y] = \mu_X \cdot E[N] = \frac{1}{2} \cdot \lambda = \frac{\lambda}{2}$ //

$$var(Y) = \sigma_X^2 E[N] + \mu_X^2 var(N) = \frac{1}{12}\lambda + \frac{1}{4}\lambda = \frac{\lambda}{3} //$$

(β) $$M_Y(s) = M_N(s)\Big|_{e^s \leftarrow M_X(s)} = e^{\lambda(e^s - 1)}\Big|_{e^s \leftarrow M_X(s)} \Rightarrow$$

$$M_Y(s) = e^{\lambda(M_X(s) - 1)} = e^{\lambda\left(\frac{e^s - 1}{s} - 1\right)}.$$

(γ) Πρέπει να υπολογίσουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της $M_Y(s)$:

$$M_Y'(s) = e^{\lambda(M_X(s)-1)} \cdot \lambda M_X'(s)$$

$$\therefore\ E[Y] = M_Y'(s)\Big|_{s=0} = e^{\lambda(M_X(0)-1)} \cdot \lambda M_X'(0)\ ,\ \begin{bmatrix} M_X(0)=1 \\ M_X'(0)=\mu_X \end{bmatrix}$$

$$= e^{\lambda(1-1)} \cdot \lambda \cdot \mu_X = 1 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{2} = \lambda/2 \ //$$

Επίσης,

$$M_Y''(s) = e^{\lambda(M_X(s)-1)}\left(\lambda M_X'(s)\right)^2 + e^{\lambda(M_X(s)-1)} \cdot \lambda M_X''(s)$$

$$\therefore\ E[Y^2] = M_Y''(s)\Big|_{s=0} = e^{\lambda(M_X(0)-1)}\left(\lambda M_X'(0)\right)^2 + e^{\lambda(M_X(0)-1)} \cdot \lambda M_X''(0)$$

$$= e^{\lambda(1-1)} \cdot \lambda^2 \cdot \mu_X^2 + e^{\lambda(1-1)} \cdot \lambda E[X^2]$$

$$= \lambda^2 \frac{1}{4} + \lambda \cdot \frac{1}{3} = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{3}$$

$$\therefore\ var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{3} - \frac{\lambda^2}{4} = \lambda/3 \ //$$

ΘΕΜΑ 2ο: Έστω X_i ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τ.μ. που μοντελοποιούν την μετατόπιση του σωματιδίου σε κάθε click του ρολογιού. Μας δίδεται ότι:

$$P_{X_i}(x) = \begin{cases} 0.45 & , x = \pm 1 \\ 0.1 & , x = 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Τότε, μετά από n χρονικές μονάδες, η θέση του σωματιδίου δίδεται από την τ.μ. $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Όσον αφορά την τ.μ. X_i, έχουμε:

$$\mu_X = E[X_i] = 1 \cdot 0.45 + (-1) \cdot 0.45 + 0 \cdot 0.1 = 0$$

$$E[X_i^2] = 1^2 \cdot 0.45 + (-1)^2 \cdot 0.45 + 0^2 \cdot 0.1 = 0.9$$

$$\sigma_X^2 = var(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = 0.9$$

Συνεπώς, $E[Y_n] = n\,\mu_X = 0$, $var(Y_n) = n \cdot 0.9$.

(α) $$P(-6 \leq Y_{20} \leq 6) = P\left(\frac{-6-0}{\sqrt{20 \cdot 0.9}} \leq \frac{Y_{20}-0}{\sqrt{20 \cdot 0.9}} \leq \frac{6-0}{\sqrt{20 \cdot 0.9}} \right)$$

$$\overset{(CLT)}{\simeq} \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{20 \cdot 0.9}}\right) - \Phi\left(\frac{-6}{\sqrt{20 \cdot 0.9}}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{20 \cdot 0.9}}\right) - 1 = \underline{2\Phi(1.4142) - 1}.$$

(β) $$P_n = 2\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{n \cdot 0.9}}\right) - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\Phi(0) - 1 = 2\frac{1}{2} - 1 = \underline{\underline{0}}.$$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 3}^{\text{ο}}}$ (α) Το χρονικό διάστημα, T_{10000}, έως την άφιξη του 10000-στού πακέτου ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 10,000 με παράμετρο $\lambda = 1500$. Επομένως,

$$E[T_{10000}] = \frac{10000}{15000} \text{ sec} = \underline{6.67 \text{ sec}}$$

(β) Το πλήθος των πακέτων, N_{600}, που φτάνουν μεταξύ 06:50 - 07:00, δηλαδή σε ένα διάστημα 10 λεπτών ή 600 sec ακολουθεί Poisson κατανομή με παράμετρο 1500×600.

Επομένως, $E[N_{600}] = 1500 \cdot 600 = \underline{900.000 \text{ πακέτα}}$

(γ) Το πλήθος των πακέτων, $N_{0.01}$, που φτάνουν σε 0.01 sec ακολουθεί Poisson με παράμετρο $1500 \times 0.01 = 15$.

Συνεπώς $P(N_{0.01}=10) = \frac{(15)^{10}}{10!} e^{-15} = \underline{\underline{0.0486}}$

(δ) Το χρονικό διάστημα T, μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 1500 sec^{-1}.

$$T \sim \exp(1500) \quad , \quad F_T(t) = 1 - e^{-1500t}.$$

Συνεπώς, $P(T > 0.0005) = 1 - F_T(0.0005) = e^{-1500 \times 0.0005}$
$= \underline{\underline{0.4724}}$

(ε) Το πλήθος των πακέτων που φτάνει σε διάρκεια 0.001 sec ακολουθεί Poisson με παράμετρο $1500 \times 0.001 = 1.5$

$$P(N_{0.001}=0) = e^{-1.5} = 0.2231$$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $0.2231^{7} = \underline{\underline{2.75 \times 10^{-5}}}$

$\square$.