

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 21/02/2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 06/03/2023

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Θέματα: Μετασχηματισμοί, Ροπογεννήτριες Συναρτήσεις

Άσκηση 1.

Υπολογίστε τις σταθερές a , b και c καθώς και τη συνάρτηση πιθανότητας για μια τ.μ. X για την οποία ισχύει ότι:

$$M_X(s) = a(e^s) + b(e^{2s}) + c(e^{3s})$$

$$E[X] = 2$$

$$Var(X) = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 2.

Έστω συνεχής τ.μ. X , με ροπογεννήτρια συνάρτηση που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$M_X(s) = \frac{9 - 7s}{3s^2 - 12s + 9}$$

- (i) Να υπολογίσετε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τ.μ. X . *Hint*: Πρέπει να παραγοντοποιήσετε το κλάσμα και να το σπάσετε σε μικρά κλάσματα.
- (ii) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της τ.μ. X , χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X .
- (iii) Να υπολογίσετε τη διασπορά της τ.μ. X , χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X .
- (iv) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X \geq 1)$.
- (v) Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2)$. *Hint*: Δείτε πως μπορείτε να αναπτύξετε τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας.

Άσκηση 3.

Έστω X μια τ.μ. με σ.π.π. $f(x) = 3e^{-3x}, x > 0$

- (i) Να βρείτε την ρ.σ. $M_X(s)$ για τις τιμές του s για τις οποίες παίρνει πεπερασμένες τιμές και χρησιμοποιώντας την για να υπολογίσετε τη μέση τιμή της X ($E[X]$) και την διασπορά της ($Var(x)$).
- (ii) Αν προσέξετε τον τύπο της μοιάζει με μια γνωστή σας κατανομή. Επαληθεύστε τα $E[X]$, $Var(X)$ μέσω του τυπολογίου του τελικού του *HY217*.
- (iii) Έστω τώρα μια άλλη τ.μ. Y , που ορίζεται ως: $Y = -2X + 3$, υπολογίστε τη. $M_Y(s)$ για τις τιμές του s για τις οποίες παίρνει πεπερασμένες τιμές.

Άσκηση 4.

Έστω δύο τ.μ. X και Y ανεξάρτητες. Η τ.μ. X είναι Poisson με παράμετρο $\lambda = 3$. Η τ.μ. Y είναι εκθετική με παράμετρο $\lambda = 2$.

Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $Z = 3(X + Y) + 2$.

Άσκηση 5.

Σίγουρα όλοι θα έχετε ακούσει για το *ChatGPT*, ένα απο τα πιο δημοφιλή προϊόντα τεχνητής νοημοσύνης. Όσοι θα το έχετε δοκιμάσει κιόλας, θα έχετε συνειδητοποιήσει ότι συχνά λόγω αριθμού χρηστών την τρέχουσα χρονική στιγμή, δεν σας αφήνει καν να συνδεθείτε. Γι' αυτό το λόγο καλείσθε να βοηθήσετε την *OpenAI* να βρεί λύση σε αυτό το πρόβλημα.

Το πλήθος των χρηστών που είναι συνδεδεμένοι το σύστημα μέσα σε μια ώρα μοντελοποιείται ως μία τ.μ. N Poisson με παράμετρο λ ενώ, η κατάσταση του κάθε χρήστη i μοντελοποιείται απο μια τυχαία μεταβλητή X_i Bernoulli με συνάρτηση πιθανότητας:

$$P_X(x) = \begin{cases} p & \text{εάν } x = 1 \text{ (είναι ενεργοί),} \\ 1 - p & \text{εάν } x = 0 \text{ (είναι ανενεργοί).} \end{cases}$$

Έστω Y ο αριθμός των χρηστών που είναι **ενεργοί**, δηλαδή $Y = \sum_{i=1}^N (X_i)$.

1. Να βρείτε την ροπογεννήτρια $M_Y(s)$.
2. Να υπολογίστε τη μέση τιμή $E[Y]$ και τη διασπορά $Var(Y)$ της τ.μ. Y . και να περιγράψετε με δικά σας λόγια τι σημαίνουν αυτές οι μετρήσεις για την εταιρία.
3. Ποιό είδος τυχαίων μεταβλητων (απο τις γνωστές σας τ.μ. στο μάθημα π.χ. Κανονική, Γεωμετρική, Bernoulli, κτλ...) σας θυμίζει η τυχαία μεταβλητη Y ;