

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{d}{ds} M_X(s) = \frac{d}{ds} (a(e^s) + b(e^{2s}) + c(e^{3s})) = a(e^s) + 2b(e^{2s}) + 3c(e^{3s})$$

$$\frac{d^2}{ds^2} M_X(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} M_X(s) \right) = \frac{d}{ds} (a(e^s) + 2b(e^{2s}) + 3c(e^{3s})) = a(e^s) + 4b(e^{2s}) + 9c(e^{3s})$$

Για να βρούμε τις σταθερές a , b , και c χρησιμοποιούμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$M(0) = 1 \Rightarrow a + b + c = 1 \Rightarrow a = 1 - b - c \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας την (1) στις απο κάτω έχουμε:

$$\frac{d}{ds} M_X(s)|_{s=0} = E[X] = 2 \Rightarrow a + 2b + 3c = 2 \Rightarrow (1 - b - c) + 2b + 3c = 2 \Rightarrow b + 2c = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} M_X(s)|_{s=0} = E[X^2] = \text{var}(X) + (E[X])^2 &= \frac{2}{4} + 2^2 = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2} \Rightarrow a + 4b + 9c = \frac{9}{2} \\ &\Rightarrow (1 - b - c) + 4b + 9c = \frac{9}{2} \Rightarrow 3b + 8c = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Λύνοντας το παρακάτω σύστημα βρίσκουμε τιμές για τα b , c :

$$\begin{cases} b + 2c = 1 \\ 3b + 8c = \frac{9}{2} \end{cases}$$

και μετά αντικαθιστώντας τα b , c στην (1) βρίσκουμε και το a . Άρα έχουμε συνολικά ότι:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4} \\ b &= \frac{2}{4} \\ c &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Οπότε η ροπογεννήτρια συνάρτηση γίνεται: $M_X(s) = \frac{1}{4}e^s + \frac{2}{4}e^{2s} + \frac{1}{4}e^{3s}$

Η συνάρτηση πιθανότητας της X προκύπτει από τις δυνάμεις του e^s και τους συντελεστές a, b και c που βρήκαμε παραπάνω. Οπότε έχουμε:

$$P(X = 1) = a = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 2) = b = \frac{2}{4}$$

$$P(X = 3) = c = \frac{1}{4}$$

Άσκηση 2.

(i) Αναλύουμε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση σε απλά κλάσματα, και έχουμε:

$$M_X(s) = \frac{9-7s}{3s^2-12s+9} = \frac{9-7s}{3(s-1)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3}$$

Για τον υπολογισμό των A, B , έχουμε:

$$\begin{cases} A = M_X(s) \cdot (s-1) \Big|_{s=1} = \frac{9-7s}{3(s-3)} \Big|_{s=1} = \frac{2}{3(-2)} = -\frac{1}{3} \\ B = M_X(s) \cdot (s-3) \Big|_{s=3} = \frac{9-7s}{3(s-1)} \Big|_{s=3} = \frac{-12}{3(2)} = -2 \end{cases}$$

Οπότε, η ροπογεννήτρια συνάρτηση γίνεται:

$$\begin{aligned} M_X(s) &= \frac{9-7s}{3(s-1)(s-3)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-1} - 2 \cdot \frac{1}{s-3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-s} + 2 \cdot \frac{1}{3-s} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-s} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3-s} \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ) (pdf) της τ.μ. X που προκύπτει από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση θα είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}3e^{-3x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(ii) Υπολογίζοντας την παράγωγο 1-ης τάξης της $M_X(s)$, έχουμε:

$$\frac{dM_X(s)}{ds} = \frac{d\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-s} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3-s}\right)}{ds} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(s-3)^2}$$

Άρα, για τη μέση τιμή της τ.μ. X έχουμε:

$$E[X] = \frac{dM_X(s)}{ds} \Big|_{s=0} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(s-3)^2} \right) \Big|_{s=0} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

(iii) Υπολογίζοντας την παράγωγο 2-ης τάξης της $M_X(s)$, έχουμε:

$$\frac{d^2M_X(s)}{ds^2} = \frac{d\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(s-3)^2}\right)}{ds} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{(s-1)^3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{-6}{(s-3)^3}$$

Άρα, για τη ροπή 2-ης τάξης της τ.μ. X έχουμε:

$$E[X^2] = \frac{d^2M_X(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{(s-1)^3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{-6}{(s-3)^3} \right) \Big|_{s=0} = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{27} = \frac{2}{3} + \frac{4}{27} = \frac{22}{27}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς της τ.μ. X , $VAR[X]$, θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή από την θεωρία σχέση:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Άρα, η διασπορά της τ.μ. X , $VAR[X]$ θα είναι τελικά:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{22}{27} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{22}{27} - \frac{25}{81} = \frac{66-25}{81} = \frac{41}{81}$$

- (iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 1) &= \int_1^{+\infty} f_X(x) dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} 3e^{-3x} \right) dx \\
 &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{3} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{2}{3} 3e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} \int_1^{+\infty} -e^{-x} dx - \frac{2}{3} \int_1^{+\infty} -3e^{-3x} dx \\
 &= -\frac{1}{3} \left[e^{-x} \right]_1^{+\infty} - \frac{2}{3} \left[e^{-3x} \right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{3} (0 - e^{-1}) - \frac{2}{3} (0 - e^{-3}) = \frac{e^{-1} + 2e^{-3}}{3}
 \end{aligned}$$

- (v) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2\right) &= \frac{P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2, 0 \leq X \leq 2\right)}{P(0 \leq X \leq 2)} \\
 &= \frac{P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2\right)}{P(0 \leq X \leq 2)} = \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 f_X(x) dx}{\int_0^2 f_X(x) dx} \\
 &= \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 \left(\frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} 3e^{-3x} \right) dx}{\int_0^2 \left(\frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} 3e^{-3x} \right) dx} = \frac{\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{3} e^{-x} dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{2}{3} 3e^{-3x} dx}{\int_0^2 \frac{1}{3} e^{-x} dx + \int_0^2 \frac{2}{3} 3e^{-3x} dx} \\
 &= \frac{-\frac{1}{3} \int_{\frac{3}{2}}^2 -e^{-x} dx - \frac{2}{3} \int_{\frac{3}{2}}^2 -3e^{-3x} dx}{-\frac{1}{3} \int_0^2 -e^{-x} dx - \frac{2}{3} \int_0^2 -3e^{-3x} dx} = \frac{-\frac{1}{3} \left[e^{-x} \right]_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{2}{3} \left[e^{-3x} \right]_{\frac{3}{2}}^2}{-\frac{1}{3} \left[e^{-x} \right]_0^2 - \frac{2}{3} \left[e^{-3x} \right]_0^2} \\
 &= \frac{-\frac{1}{3} (e^{-2} - e^{-\frac{3}{2}}) - \frac{2}{3} (e^{-6} - e^{-\frac{9}{2}})}{-\frac{1}{3} (e^{-2} - 1) - \frac{2}{3} (e^{-6} - 1)} = \frac{-e^{-2} + e^{-\frac{3}{2}} - 2e^{-6} + 2e^{-\frac{9}{2}}}{-e^{-2} + 1 - 2e^{-6} + 2} \\
 &= \frac{e^{-\frac{3}{2}} + 2e^{-\frac{9}{2}} - e^{-2} - 2e^{-6}}{3 - e^{-2} - 2e^{-6}} \approx \frac{0.1051}{2.8597} = 0.0367
 \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

(i) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 M_X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{sx} f_X(x)) dx = \int_0^{\infty} e^{sx} 3e^{-3x} dx = \int_0^{\infty} 3e^{(s-3)x} dx \\
 &= \frac{3}{s-3} e^{(s-3)x} \Big|_{s=0}^{\infty} \quad (\text{για } s \neq 3 \text{ και για } s-3 < 0 \text{ ή } s < 3) = \frac{3}{s-3} (0 - 1) = -\frac{3}{s-3}
 \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, $M_X(s) = -\frac{3}{s-3}, s < 3$: (***)

Για την μέση τιμή και τη διασπορά έχουμε:

$$E[X] = \frac{d}{ds} M_X(s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(-\frac{3}{s-3} \right) \Big|_{s=0} = \frac{3}{(s-3)^2} \Big|_{s=0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$E[X^2] = \frac{d^2}{ds^2} M_X(s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(\frac{3}{(s-3)^2} \right) \Big|_{s=0} = -\frac{6}{(s-3)^3} \Big|_{s=0} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

οπότε είναι $Var(X) = (\frac{2}{9}) - (\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ (ii) Αν προσέξτε τον τύπο της μοιάζει με την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 3$.

Αν δούμε λοιπόν μέσω των τύπων για την εκθετική κατανομή ισχύει ότι:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = 1/3 \text{ που είναι αυτό που βρήκαμε}$$

$$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2} = 1/9 \text{ που είναι αυτό που βρήκαμε}$$

(iii) Έχουμε:

$$Y = -2X + 3 = AX + B, \text{ με } A = -2, B = 3$$

$$\begin{aligned}
 M_Y(s) &= e^{Bs} M_X(As) = e^{3s} M_X(-2s) \\
 &= e^{3s} \cdot \left(-\frac{3}{-2s-3} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{3s}}{2s+3} \quad (\text{για } -2s < 3 \text{ ή } s > -3/2)$$

καθώς για ο,τι s μπαίνει μέσα στην $M_X(s)$ ισχύει ότι πρέπει να είναι $s < 3$ (***)

Άσκηση 4.**Λύση**

Για την κατανομή Poisson με παράμετρο λ ισχύει ότι $M(s) = e^{\lambda(e^s-1)}$.

Για την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ ισχύει ότι $M(s) = \frac{\lambda}{\lambda-s}$.

1. Για το άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ. $Y = X_1 + \dots + X_n$, ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(X_1+\dots+X_n)}] = E[e^{s(X_1)}] \times \dots \times E[e^{s(X_n)}] = M_{X_1}(s) \times \dots \times M_{X_n}(s).$$

Επομένως,

$$M_L(s) = M_{X+Y}(s) = M_X(s) \cdot M_Y(s) = e^{\lambda_X(e^s-1)} \cdot \frac{\lambda_Y}{\lambda_Y-s} = e^{3(e^s-1)} \cdot \frac{2}{2-s}.$$

2. Για τον γραμμικό συνδυασμό μιας τ.μ., $Y = aX + b$, ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(aX+b)}] = e^{sb} E[e^{saX}] = e^{sb} M_X(sa).$$

Επομένως,

$$M_Z(s) = M_{3L+2}(s) = M_{aL+b}(s) = e^{sb} M_L(sa) = e^{2s} M_L(3s) = e^{2s} \cdot e^{3(e^{3s}-1)} \cdot \frac{2}{2-3s} = e^{2s+3(e^{3s}-1)} \cdot \frac{2}{2-3s}.$$

Άσκηση 5.**Λύση**

- (i) Έστω N ο αριθμός των χρηστών που είναι συνδεδεμένοι το σύστημα μέσα σε μια ώρα. Εφόσον η N είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο λ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός που της αντιστοιχεί δίνεται από την εξής σχέση:

$$M_N(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}$$

Έστω X_i μια διακριτή τ.μ. *bernoulli* που περιγράφει την κατάσταση του χρήστη i με συνάρτηση κατανομής:

$$P_X(x) = \begin{cases} p & \text{εάν } x = 1 \text{ (είναι ενεργοί),} \\ 1 - p & \text{εάν } x = 0 \text{ (είναι ανενεργοί).} \end{cases}$$

Και από τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός μιας διακριτής τ.μ. δίνεται από την εξής σχέση:

$$M_X(s) = \sum_{x_i} P_{X_i}(x_i) * e^{sx_i} = pe^{1s} + (1-p)e^{0s} = pe^s + 1 - p$$

όπου x_i είναι η τιμή της τυχαίας μεταβλητής X_i .

Εμείς ψάχνουμε να βρούμε πληροφορίες για την τ.μ. Y που δηλώνει τον **αριθμό των χρηστών** που είναι **ενεργοί**, δηλαδή $Y = \sum_{i=1}^N (X_i)$. όπου $X_i = 0$ ή $X_i = 1$

Ο μετασχηματισμός $M_Y(s)$ προσδιορίζεται αντικαθιστώντας στην έκφραση του $M_N(s)$ όπου e^s με $M_X(s)$. Έτσι, έχουμε τελικά:

$$M_Y(s) = M_N(s) \Big|_{e^s = M_X(s)} = e^{\lambda(e^s - 1)} \Big|_{e^s = M_X(s)} = e^{\lambda(M_X(s) - 1)} = e^{\lambda(pe^s + 1 - p - 1)} = e^{\lambda(pe^s - p)} = e^{\lambda p(e^s - 1)}$$

- (ii) Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη μέση τιμή της τ.μ. Y , ισχύει η σχέση (Wald's equation):

$$E[Y] = E[X]E[N]$$

Εφόσον η N είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο λ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$E[N] = \lambda.$$

Επίσης βρίσκουμε τη μέση τιμή της *Bernoulli* X ως:

$$E[X] = p$$

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$E[Y] = p\lambda$$

Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη διασπορά της τ.μ. Y , ισχύει η σχέση:

$$VAR[Y] = VAR[X] \cdot E[N] + (E[X])^2 \cdot VAR[N]$$

Εφόσον η N είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο λ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι: $VAR[N] = \lambda$.

Εφόσον η X είναι μία τ.μ. *Bernoulli* με παράμετρο p , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι: $VAR[X] = p(1 - p)$.

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$VAR[Y] = p(1 - p) \cdot \lambda + p^2 \cdot \lambda = (p - p^2) \cdot \lambda + p^2 \cdot \lambda = p\lambda - p^2\lambda + p^2\lambda = p\lambda$$

(iii) Ποιό είδος τυχαίων μεταβλητών σας θυμίζει η τυχαία μεταβλητή Y ;

Απάντηση: Κάθε στιγμή εμείς προσπαθούμε να βρούμε πόσοι χρήστες είναι ενεργοί (εκτελούν ενέργειες στο σύστημα) από το σύνολο των χρηστών που είναι συνδεδεμένοι. Άρα θα μπορούσαμε να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα μας με μια *Poisson* τ.μ. M με παράμετρο $\lambda_M = p\lambda = E[M] = Var(M)$. Μας ενδιαφέρει δηλαδή η πιθανότητα εμφάνισης ενός γεγονότος (οι χρήστες να είναι ενεργοί) κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος (1 ώρας).