

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 20/03/2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 30/03/2023

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων. Μπορείτε, αν προτιμάτε, να χρησιμοποιήσετε προγράμματα τύπου Latex ή Word. Για τις προγραμματιστικές ασκήσεις θα πρέπει να παραδώσετε ό,τι ζητείται στην άσκηση.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Θέματα: Στοχαστικές Διαδικασίες Bernoulli, Στοχαστικές Διαδικασίες Poisson

Άσκηση 1.

Σε έναν δρομολογητή φθάνουν δύο ειδών πακέτα, A και B. Τα πακέτα A φθάνουν σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda_A = 1$ πακέτο ανά δευτερόλεπτο, ενώ τα πακέτα B φθάνουν σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda_B = 2$ πακέτα ανά δευτερόλεπτο. Οι δύο διαδικασίες αφίξεων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Δύο πελάτες A και B υποβάλλουν εργασίες σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς α και β εργασίες ανά ώρα, αντίστοιχα.

- α') Υπολογίστε την πιθανότητα να φθάσουν στο δρομολογητή 100 πακέτα τύπου A μέσα σε ένα λεπτό.
- β') Έστω ότι στο πρώτο λεπτό φθάνουν στο δρομολογητή 80 πακέτα τύπου A. Υπολογίστε την πιθανότητα στο δεύτερο λεπτό να φθάσουν 100 πακέτα τύπου A.
- γ') Υπολογίστε την πιθανότητα να φθάσουν στο δρομολογητή 100 πακέτα μέσα σε ένα λεπτό.
- δ') Υπολογίστε την μέση τιμή του χρόνου μεταξύ της άφιξης του τρίτου και του τέταρτου πακέτου.
- ε') Δεδομένου ότι σε ένα λεπτό έχουν φθάσει 100 πακέτα, υπολογίστε την πιθανότητα να είναι όλα τύπου A.
- ζ') Δεδομένου ότι σε ένα λεπτό έχουν φθάσει 100 πακέτα, υπολογίστε την πιθανότητα 40 από τα 100 να είναι τύπου A.

Άσκηση 2. Η Μάρθα λαμβάνει μέρος στο αγώνισμα της σκοποβολής και της ζητείται να πετύχει όσους στόχους μπορεί σε 10 βολές. Η Μάρθα πετυχαίνει τον στόχο με πιθανότητα $\frac{3}{4}$.

- α') Βρείτε την πιθανότητα να πετύχει ακριβώς 7 στόχους.
- β') Βρείτε τον μέσο αριθμό στόχων που η Μάρθα θα πετύχει πριν αστοχήσει τρεις φορές.
- γ') Βρείτε την πιθανότητα να πετύχει τον στόχο στις δύο πρώτες προσπάθειες και να αστοχήσει στην τρίτη και τέταρτη προσπάθεια.
- δ') Βρείτε την πιθανότητα να αστοχεί σε μία βολή πριν ευστοχήσει διαδοχικά σε τρεις.

Άσκηση 3.

Εξερευνώντας το συγκρότημα σπηλαίων κατά το ταξίδι σας στο Κουάνγκ-Μπιν, συνειδητοποιείτε ότι η μπαταρία στον φακό σας έχει τελειώσει. Συνεπώς, περιπλανώμενοι στα σκοτεινά μονοπάτια των σπηλαίων κουτουλάτε σε σταλακτίτες με πιθανότητα $p = 0.1$ ανά δευτερόλεπτο.

- α') Βρείτε την πιθανότητα να κουτουλήσετε πάνω σε σταλακτίτη μέσα στα πρώτα 5 δευτερόλεπτα.
- β') Βρείτε την μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να κουτουλήσετε πάνω σε σταλακτίτη για πρώτη φορά.
- γ') Υποθέστε ότι έχετε περπατήσει για 10 δευτερόλεπτα, δίχως να κουτουλήσετε. Βρείτε την μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να κουτουλήσετε για πρώτη φορά.
- δ') Έστω ότι η πιθανότητα διπλασιάζεται, $p = 0.2$. Βρείτε πως αλλάζουν τα αποτελέσματα στα παραπάνω ερωτήματα.

Άσκηση 4.

Ένα κατάστημα διαφημίζει ότι δίνει ένα μικρό δώρο σε κάθε 13^ο αφικνούμενο πελάτη. Εάν οι αφίξεις πελατών μοντελοποιούνται από μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ ,

- α') δώστε την κατανομή των χρόνων μεταξύ αφίξεων διαδοχικών τυχερών πελατών,
- β') υπολογίστε την πιθανότητα $P(M_t = k)$ για τον αριθμό των δώρων M_t που δίδονται από το κατάστημα στο διάστημα $[0, t]$ σαν συνάρτηση των λ , t και k ,
- γ') για $\lambda = 20$ πελάτες ανά ώρα, υπολογίστε την πιθανότητα το κατάστημα να δώσει περισσότερα από δύο δώρα σε διάστημα μίας ώρας.

Άσκηση 5.

Η Όλγα για να πάει στη δουλειά της το πρωί έχει δύο επιλογές. Να πάρει ταξί ή λεωφορείο. Οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων διαδοχικών ταξί είναι εκθετικά κατανομημένες ανεξάρτητες τ.μ. με παράμετρο λ_1 , ενώ οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων διαδοχικών λεωφορείων είναι εκθετικά κατανομημένες ανεξάρτητες τ.μ. με παράμετρο λ_2 . Έστω ότι η Όλγα φεύγει από το σπίτι της στις 8:00 το πρωί.

- α') Βρείτε ποιο είναι το μέσο χρονικό διάστημα μέχρι να δει το πρώτο όχημα.
- β') Βρείτε την πιθανότητα το πρώτο όχημα που βλέπει να είναι ταξί και την πιθανότητα να είναι λεωφορείο.

Με ταξί, η διάρκεια της διαδρομής (σε λεπτά της ώρας) από το σπίτι της Όλγας μέχρι τη δουλειά της, είναι εκθετικά κατανομημένη τ.μ. με παράμετρο μ_1 , ενώ με λεωφορείο η αντίστοιχη διάρκεια είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο μ_2 . Υποθέτουμε ανεξαρτησία όλων των τ.μ.

- γ') Η Όλγα μπαίνει στο πρώτο όχημα που περνά και φτάνει στη δουλειά της μετά από X λεπτά. Υπολογίστε τη ροπογενήτρια συνάρτηση της τ.μ. X . (Βοήθεια: Εκφράστε την τ.μ. X ως το άθροισμα δύο ανεξάρτητων τ.μ.)
- δ') Έστω ότι ο Μιχάλης, ο συνάδελφος της Όλγας, μένει σε σπίτι που ισαπέχει από τη δουλειά τους με το σπίτι της Όλγας. Αν την ίδια στιγμή που η Όλγα μπαίνει σε ένα ταξί, ο Μιχάλης μπαίνει σε ένα λεωφορείο, και αν Y ο χρόνος από την αναχώρησή τους έως τη στιγμή που συναντιούνται στη δουλειά, υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. Y .

Άσκηση 6.

Ένας ψαράς πιάνει ψάρια σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 0.6$ ανά ώρα. Ο ψαράς αρχικά ψαρεύει για δύο ώρες. Εάν σε αυτό το διάστημα πιάσει τουλάχιστον ένα ψάρι, τότε σταματάει το ψάρεμα. Διαφορετικά, συνεχίζει μέχρι να πιάσει ένα ψάρι οπότε και σταματάει το ψάρεμα.

- α') Βρείτε την πιθανότητα ότι θα αναγκαστεί να ψαρεύει παραπάνω από δύο ώρες.
- β') Βρείτε την πιθανότητα ότι πιάνει τουλάχιστον δύο ψάρια.
- γ') Βρείτε τον μέσο συνολικό χρόνο ψαρέματος, δεδομένου ότι ήδη ψαρεύει για 4 ώρες.
- δ') Βρείτε την πιθανότητα ότι ο συνολικός χρόνος που περνάει ψαρεύοντας είναι μεγαλύτερος των δύο και μικρότερος ή ίσος των επτά ωρών.
- ε') Προσομοιώστε την παραπάνω άσκηση σε γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας, εκτελώντας 10^4 πειράματα όπου στο κάθε πείραμα υπολογίζετε τον συνολικό χρόνο ψαρέματος του ψαρά. Απεικονίστε την παραπάνω κατανομή σε ένα ιστόγραμμα. Δοκιμάστε για μικρότερες τιμές του λ και εξηγήστε συνοπτικά τις παρατηρήσεις σας.
(Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε συναρτήσεις όπως `poissrnd()` για Matlab ή `random.poisson()` για Python).