

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Θέματα: Στοχαστικές Διαδικασίες Bernoulli, Στοχαστικές Διαδικασίες Poisson

Άσκηση 1.

α') Η ζητούμενη πιθανότητα μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$P(N_{60}^A = 100) = \frac{(\lambda_A \tau)^{100}}{100!} e^{-\lambda_A \tau} \Big|_{\lambda_A \tau = 1 \cdot 60} = \frac{60^{100}}{100!} e^{-60} \cong 6.13 \cdot 10^{-7}$$

β') Λόγω ανεξαρτησίας η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(N_{[60,120]}^A = 100 | N_{[0,60]}^A = 80) = P(N_{60}^A = 100) \stackrel{(a)}{\cong} 6.13 \cdot 10^{-7}.$$

γ') Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(N_{60} = 100) = \frac{(\lambda \tau)^{100}}{100!} e^{-\lambda \tau} \Big|_{\lambda \tau = (\lambda_A + \lambda_B) \tau = 3 \cdot 60 = 180} = \frac{180^{100}}{100!} e^{-180}.$$

δ') Λόγω ανεξαρτησίας, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την εύρεση μέσης τιμής του χρόνου της 1ης άφιξης. Επομένως, για τον χρόνο μέχρι την 1η άφιξη ισχύει

$$T \sim \exp(\lambda = \lambda_A + \lambda_B) \Rightarrow E[T] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3} \text{ sec}$$

ε')

$$\begin{aligned} P(N_{60}^A = 100 | N_{60} = 100) &= \frac{P(N_{60}^A = 100, N_{60} = 100)}{P(N_{60} = 100)} = \frac{P(N_{60}^A = 100) P(N_{60}^B = 0)}{P(N_{60} = 100)} \\ &= e^{-60\lambda_A} \frac{(60\lambda_A)^{100}}{100!} \cdot e^{-60\lambda_B} \cdot \frac{1}{e^{-60(\lambda_A + \lambda_B)} \frac{(60(\lambda_A + \lambda_B))^{100}}{100!}} \\ &= \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^{100} \end{aligned}$$

ϖ')

$$P(N_{60}^A = 40 | N_{60} = 100) = \binom{100}{40} \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^{40} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^{60}$$

Άσκηση 2. Το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί ως μια διαδικασία Bernoulli με παραμέτρους ($n = 10, p = 0.75$).

α') Χρησιμοποιώντας τη διωνυμική,

$$P_S(k=7) = \binom{10}{7} \left(\frac{3}{4}\right)^7 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} \left(\frac{3}{4}\right)^7 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \approx 120 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0.24$$

β') Ο αναμενόμενος αριθμός προσπαθειών της Μάρθας μέχρι την τρίτη αποτυχία είναι η μέση τιμή μιας Pascal τυχαίας μεταβλητής Y_k τάξεως $k=3$ με παράμετρο $p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Έτσι $E[Y_k] = \frac{k}{p} = 3 \cdot 4 = 12$, και άρα ο αναμενόμενος αριθμός στόχων που θα πετύχει έως την τρίτη αποτυχία της είναι $E[Y_k] - 3 = 12 - 3 = 9$.

γ')

$$P = p^2 \cdot (1-p)^2 = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{16} = \frac{9}{256}$$

δ') Και πάλι, λόγω έλλειψης μνήμης (ανεξαρτησίας),

$$P = (1-p) \cdot p^3.$$

Άσκηση 3. Η άσκηση αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια διαδικασία Bernoulli, με παράμετρο $p = 0.1$.

α') Για να υπολογίσουμε την ζητούμενη πιθανότητα θα υπολογίσουμε την πιθανότητα να μην υπάρχει καμία άφιξη (κανένα κουτούλημα) σε διάστημα 5 δευτερολέπτων. Χρησιμοποιώντας τη διωνυμική κατανομή, έχουμε

$$P_S(0) = \frac{5!}{0! \cdot 5!} p^0 (1-p)^5 = (1-p)^5 = 0.9^5.$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P = 1 - P_S(0) \approx 0.41.$$

β') Ο χρόνος T μέχρι την 1η άφιξη ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 0.1$.

$$E[T] = \frac{1}{p} = 10 \text{ δευτερόλεπτα}$$

γ') Γνωρίζουμε ότι η Bernoulli δεν έχει μνήμη, επομένως η απάντησή μας θα είναι ίδια με αυτήν του ερωτήματος (β).

δ')

$$P_S(0) = \frac{5!}{0! \cdot 5!} p^0 (1-p)^5 = (1-p)^5 = 0.8^5.$$

$$P = 1 - P_S(0) \approx 0.67$$

$$E[T] = \frac{1}{0.2} = 5$$

Άσκηση 4.

α') Για να βρούμε την κατανομή μεταξύ αφίξεων διαδοχικών τυχερών πελατών θα ορίσουμε την τ.μ. $Y_i = X_1 + X_2 + \dots + X_{12}$ ως τον χρόνο μεταξύ αφίξεων διαδοχικών "τυχερών" πελατών, όπου X_j ο χρόνος μεταξύ της άφιξης του $j-1$ -στου και j -στου πελάτη. Οι X είναι i.i.d. και ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Συνεπώς, η κατανομή της Y θα είναι Erlang τάξης $k = 13$, με κατανομή:

$$f_{Y_{13}}(y) = \frac{\lambda^{13} y^{12} e^{-\lambda y}}{12!}$$

β') Έχουμε

$$P(M_t = k) = P(M_t \geq k) - P(M_t \geq k+1) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}$$

γ') Χρησιμοποιώντας τον τύπο του (β) υπολογίζουμε αντικαθιστώντας στην παρακάτω σχέση, για $\lambda = 20$.

$$P(M_t \geq 2) = 1 - (P(M_t = 0) + P(M_t = 1) + P(M_t = 2))$$

Άσκηση 5.

(α) Η συνολική σ.δ. αφίξεων όλων των οχημάτων είναι Poisson με ένταση $\lambda_1 + \lambda_2$. Συνεπώς το μέσο χρονικό διάστημα μέχρι την άφιξη του πρώτου οχήματος είναι $\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

(β) Από τις ιδιότητες των συγχωνευμένων σ.δ. Poisson έχουμε ότι:

$$P(\text{πρώτο όχημα είναι ταξί}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Και

$$P(\text{πρώτο όχημα είναι λεωφορείο}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

(γ) Έχουμε $X = W + D$, όπου W είναι ο χρόνος έως την άφιξη του πρώτου οχήματος και D είναι η διάρκεια της διαδρομής. Προφανώς $W \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$ οπότε $M_W(s) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - s}$. Για την τ.μ. D έχουμε το εξής:

$$\begin{aligned} M_D(s) &= E[e^{sD}] = E[e^{sD} \mid \text{όχημα είναι ταξί}] \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &+ E[e^{sD} \mid \text{όχημα είναι λεωφορείο}] \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_1 - s} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\mu_2}{\mu_2 - s} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \end{aligned}$$

αφού η διάρκεια της διαδρομής D δεδομένου ότι το μέσο είναι το ταξί (λεωφορείο) είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο μ_1 (μ_2).

Καθώς οι W και D είναι ανεξάρτητες, έχουμε ότι:

$$M_X(s) = M_W(s) M_D(s) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - s} \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 - s} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\mu_2}{\mu_2 - s} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)$$

(δ) Έστω D_T η διάρκεια διαδρομής με ταξί και D_B η διάρκεια διαδρομής με το λεωφορείο. Τότε $Y = \max(D_T, D_B)$. Επίσης μπορούμε να εκφράσουμε την Y ως $Y = Y_1 + Y_2$ όπου Y_1 είναι ο χρόνος έως την άφιξη του πρώτου οχήματος στη δουλειά, Y_2 είναι χρόνος από την άφιξη του πρώτου οχήματος έως την άφιξη του δεύτερου οχήματος στην δουλειά.

Έχουμε ότι Y_1 είναι ο χρόνος πρώτης άφιξης σε σ.δ. Poisson έντασης $\mu_1 + \mu_2$.

Επομένως, $E[Y_1] = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2}$ Επίσης,

$$\begin{aligned} E[Y_2] &= E[Y_2 \mid D_T < D_B] P(D_T < D_B) + E[Y_2 \mid D_T \geq D_B] P(D_T \geq D_B) \\ &= \frac{1}{\mu_1} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{1}{\mu_2} \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \end{aligned}$$

Επομένως, $E[Y] = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left[1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right]$.

Άσκηση 6.

α') Αυτή είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει άφιξη για 2 ώρες. Δίδεται από:

$$P(0, 2) = e^{-0.6 \cdot 2} = 0.301.$$

Εναλλακτική λύση: Αυτή είναι η πιθανότητα ότι η πρώτη άφιξη έρχεται μετά από 2 ώρες:

$$P(T_1 > 2) = \int_2^\infty f_{T_1}(t) dt = \int_2^\infty 0.6 e^{-0.6t} dt = e^{-0.6 \cdot 2} = 0.301.$$

β') Αν πιάσει τουλάχιστον δύο ψάρια, πρέπει να έχει ψαρέψει για ακριβώς δύο ώρες. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με την πιθανότητα ότι ο αριθμός των ψαριών που πιάνονται κατά τις πρώτες δύο ώρες είναι τουλάχιστον 2, δηλαδή:

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(k, 2) = 1 - P(0, 2) - P(1, 2) = 1 - e^{-0.6 \cdot 2} - (0.6 \cdot 2) e^{-0.6 \cdot 2} = 0.337.$$

Εναλλακτική λύση: Το γεγονός που μας ενδιαφέρει συμβαίνει αν και μόνο αν ο χρόνος Y_2 της δεύτερης άφιξης είναι λιγότερος ή ίσος με 2. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(Y_2 \leq 2) = \int_0^2 f_{Y_2}(y) dy = \int_0^2 (0.6)^2 y e^{-0.6y} dy.$$

Αυτό το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας κατά μέρη, όμως αυτός ο υπολογισμός είναι πιο περίπλοκος σε σχέση με την πρώτη λύση.

γ') Δεδομένου ότι ο ψαράς ήδη ψαρεύει για 4 ώρες, ο μελλοντικός χρόνος ψαρέματος είναι ο χρόνος μέχρι να πιαστεί το πρώτο ψάρι. Λόγω της έλλειψης μνήμης της στοχαστικής διαδικασίας Poisson, ο μελλοντικός χρόνος είναι εκθετικός με μέση τιμή 1λ. Επομένως, ο μέσος συνολικός χρόνος ψαρέματος είναι:

$$4 + \frac{1}{0.6} = 5.667.$$

δ') Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα ο ψαράς να μην πιάσει κανένα ψάρι στις πρώτες 2 ώρες, και πιάσει τουλάχιστον 1 στις υπόλοιπες 5 ώρες. Η πρώτη πιθανότητα μας δίνεται από το ερώτημα (α), ενώ η δεύτερη μπορεί να υπολογιστεί ως $1 - P(0, 5) = 1 - e^{-0.6 \cdot 5} = 0.95$. Άρα η τελική ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $P = 0.3 \cdot 0.95 = 0.285$.

ε') Όπως βλέπουμε, για μεγαλύτερο λ (αριστερή εικόνα) το μεγαλύτερο πλήθος της κατανομής βρίσκεται σε μικρές τιμές του χρόνου, ενώ καθώς το μειώνουμε (δεξιά εικόνα) η κατανομή 'απλώνεται' σε μεγαλύτερο εύρος.

