

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2023  
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 26/04/2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 10/05/2023

**ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ**

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΠΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

**Άσκηση 1**

Μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με έξι καταστάσεις  $\{S_0, \dots, S_5\}$  περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δώστε το γράφημα της αλυσίδας. Έστω ότι επιλέγεται τυχαία η αρχική κατάσταση στον χρόνο  $n = 0$ . Υπολογίστε την πιθανότητα ότι

- το σύστημα επισκέπτεται την  $S_2$  για πρώτη φορά την χρονική στιγμή  $n = k$ .
- το σύστημα δεν επισκέπτεται ποτέ την  $S_0$ .
- το σύστημα επισκέπτεται την  $S_5$  και κατόπιν την εγκαταλείπει αμέσως την επόμενη χρονική στιγμή.
- το σύστημα επισκέπτεται την  $S_1$  για πρώτη φορά σε χρόνο  $n = 2$ .

## Άσκηση 2

Δύο φίλοι, ο Βασίλης και η Αλίκη, ανταγωνίζονται για χρόνια στο σκάκι και έχουν κάνει την εξής συμφωνία. Κάθε πρώτη Κυριακή του μήνα θα παίζουν μία παρτίδα σκάκι και θα καταγράφουν τις νίκες τους. Εμπειρικά, έχουν δει ότι αν κάποιος από τους δύο κερδίσει τον ένα μήνα, τον επόμενο μήνα θα χάσει με πιθανότητα  $2/6$ , θα κερδίσει με πιθανότητα  $3/6$  και θα έρθουν ισοπαλία με πιθανότητα  $1/6$ . Αν κάποιον μήνα έρθουν ισοπαλία, τον επόμενο μήνα κερδίζει ένας από τους δύο με ίση πιθανότητα  $1/3$  ή έρχονται ξανά ισοπαλία με πιθανότητα  $1/3$ .

- α) Έστω  $A$  και  $B$  τα ενδεχόμενα να κερδίσει η Αλίκη και ο Βασίλης αντίστοιχα και  $I$  το ενδεχόμενο της ισοπαλίας. Μοντελοποιήστε τα αποτελέσματα των παρτίδων με μία Μαρκοβιανή αλυσίδα και δώστε τον πίνακα μεταβάσεων.
- β) Ποια η πιθανότητα ότι, ανεξαρτήτως του αποτελέσματος του πρώτου παιχνιδιού, στο μακρινό μέλλον οι δύο παίκτες θα έρθουν ισοπαλία;
- γ) Οι δύο παίκτες μετράνε πόσες φορές έχουν κερδίσει συνολικά. Έστω  $N_A$  και  $N_B$  το σύνολο των νικών των δύο παικτών. Θέλουμε να μελετήσουμε την διαφορά  $\Delta = N_A - N_B$ . Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την ακολουθία  $\Delta_t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$  ως μία αλυσίδα Μαρκόβ; Αν ναι, δώστε την αλυσίδα και τον πίνακα μεταβάσεων

## Άσκηση 3

Μια αλυσίδα Markov με 6 καταστάσεις  $\{S_1, \dots, S_6\}$  περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

- α) Σχεδιάστε το γράφημα της αλυσίδας αυτής και αναγνωρίστε τις έμμονες και τις μεταβατικές καταστάσεις. Επίσης, προσδιορίστε τις επικοινωνιακές κλάσεις και βρείτε ποιες από αυτές είναι περιοδικές.
- β) Υπάρχουν στατικές πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1; Αν ναι, ποιες είναι αυτές;
- γ) Υπάρχουν στατικές πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 5; Αν ναι, ποιες είναι αυτές;

## Άσκηση 4.

Σε ένα μικρό χωριό που ονομάζεται Ποταμιά, υπάρχει ένας πληθυσμός κουνελιών που ζει στην όχθη του ποταμού. Ο πληθυσμός των κουνελιών μπορεί φυσιολογικά κάθε μέρα να αυξηθεί μέσω των γεννήσεων ή να μειωθεί μέσω των θανάτων. Αν ο πληθυσμός ξεπεράσει τα 5, τότε οι κάτοικοι παίρνουν αμέσως τα περίσσια κουνέλια για τροφή, αφήνοντας πίσω 5. Επομένως ο πληθυσμός δεν ξεπερνάει ποτέ τα 5. Επίσης, οι κάτοικοι φροντίζουν, σε περίπτωση που ο πληθυσμός πέσει στο 1, την επόμενη μέρα να φέρουν πάντα ένα επιπλέον κουνέλι από τις κοτινές περιοχές για να συνεχιστεί η αναπαραγωγή.

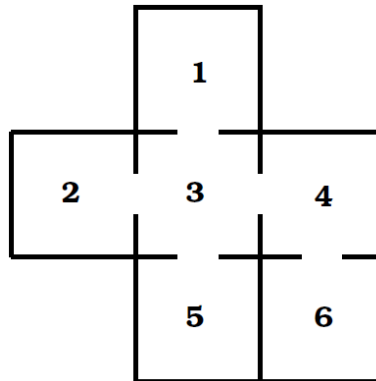
Το συμβούλιο του χωριού παρατήρησε ότι ο πληθυσμός των κουνελιών αλλάζει σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες: Κάθε μέρα, στα κουνέλια προστίθεται ένα νέο μέλος με πιθανότητα 0.25 και πεθαίνει ένα από τα υπάρχοντα με πιθανότητα 0.2, ανεξάρτητα από το τρέχον μέγεθος πληθυσμού.

Το συμβούλιο αποφάσισε να δημιουργήσει μια αλυσίδα γέννησης-θανάτου Μάρκοβ για να μοντελοποιήσει τον πληθυσμό των κουνελιών στην Ποταμιά.

- α) Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει το πλήθος των κουνελιών και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα μετάβασης.
- β) Βρείτε την κατανομή σταθερής κατάστασης του συστήματος.

## Άσκηση 5

Ένα ποντίκι διατρέχει το λαβύρινθο που φαίνεται παρακάτω. Σε κάθε βήμα φεύγει από το δωμάτιο, επιλέγοντας τυχαία μία από τις πόρτες του δωματίου που βρίσκεται.



- Δώστε τον πίνακα μετάβασης για αυτή την αλυσίδα Markov.
- Αναγνωρίστε τις κλάσεις έμμονων καταστάσεων της αλυσίδας αυτής και χαρακτηρίστε τις ως περιοδικές ή απεριοδικές. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- Βρείτε τη στατική κατανομή στο χώρο καταστάσεων της αλυσίδας.

## Άσκηση 6

Σε αυτήν την άσκηση θα χρησιμοποιήσετε το μοντέλο της Άσκησης 5 για να προσομειώσετε μερικές 'διαδρομές' του ποντικιού μέσα στον λαβύρινθο. Πιο συγκεκριμένα,

- Ορίστε τον πίνακα μεταβάσεων  $P$  και θεωρήστε μια κατανομή  $starting\_pos$  για την αρχική κατάσταση. Για παράδειγμα, αν θέλετε η αρχική κατάσταση να είναι πάντα η 3, τότε θα πρέπει  $starting\_pos = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ , ενώ αν θέλετε να είναι είτε η 1 είτε η 2 με ίση πιθανότητα, θα πρέπει  $starting\_pos = [0.5 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Δημιουργήστε επίσης ένα διάνυσμα  $visits$  μήκους 6, στο οποίο θα μετράτε πόσες φορές έχετε επισκεφθεί κάθε θέση στον λαβύρινθο.
- Θα επιλέξετε μία αρχική κατάσταση σύμφωνα με την κατανομή που έχετε ορίσει, και θα ακολουθήσετε μια τυχαία διαδρομή στον λαβύρινθο μήκους  $t = 25$ ,  $t = 100$  και  $t = 10000$ . Σε κάθε βήμα της διαδρομής, θα χρησιμοποιείτε την σωστή γραμμή του πίνακα  $P$  για να επιλέξετε (τυχαία) την θέση σας στο επόμενο βήμα.
- Επαναλάβετε  $k = 100$  φορές το πείραμά σας, κάθε φορά επιλέγοντας ανεξάρτητα την αρχική κατάσταση σύμφωνα με την κατανομή σας. Στο τέλος, θα πρέπει να έχετε αποθηκεύσει στο διάνυσμα  $visits$  τον αριθμό των επισκέψεων σε κάθε θέση, για το σύνολο των διαδρομών.
- Για την αναφορά σας, θα παράξετε ένα γράφημα με μπάρες (π.χ. στην *MATLAB* χρησιμοποιήστε την εντολή *bar*), όπου θα δείχνετε τις εμπειρικές πιθανότητες επίσκεψης κάθε θέσης για τις διαδρομές μήκους  $t = 25$ ,  $t = 100$  και  $t = 10000$ . Οι κατανομές που σας ζητούνται να χρησιμοποιήσετε είναι οι εξής: (i)  $[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , (ii)  $[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , (iii)  $[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ , (iv)  $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ , (v)  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ , (vi)  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$ , (vii) η στατική κατανομή που βρήκατε στην προηγούμενη άσκηση, (viii) οποιαδήποτε άλλη θέλετε εσείς να δοκιμάσετε.
- Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας. Προσέξτε ότι έχετε μετρήσει τους αριθμούς των επισκέψεων σε κάθε κατάσταση σε όλο το μήκος των διαδρομών. Πώς σχετίζεται αυτό με την στατική κατανομή;