

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 26/04/2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 10/05/2023

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΠΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με έξι καταστάσεις $\{S_0, \dots, S_5\}$ περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δώστε το γράφημα της αλυσίδας. Έστω ότι επιλέγεται τυχαία η αρχική κατάσταση στον χρόνο $n = 0$. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι

- το σύστημα επισκέπτεται την S_2 για πρώτη φορά την χρονική στιγμή $n = k$.
- το σύστημα δεν επισκέπτεται ποτέ την S_0 .
- το σύστημα επισκέπτεται την S_5 και κατόπιν την εγκαταλείπει αμέσως την επόμενη χρονική στιγμή.
- το σύστημα επισκέπτεται την S_1 για πρώτη φορά σε χρόνο $n = 2$.

Λύση

- α) Έστω A_k το γεγονός ότι το σύστημα επισκέπτεται την S_2 για πρώτη φορά τη χρονική στιγμή k . Παρατηρούμε ότι καμία κατάσταση πέραν της ίδιας της S_2 , δεν μεταβαίνει στην S_2 . Επομένως,

$$P(A_k) = \begin{cases} 1/6 & , k = 1 \\ 0 & , k > 1 \end{cases}$$

- β) Έστω A το γεγονός ότι το σύστημα δεν επισκέπτεται την S_0 ποτέ. Παρατηρούμε ότι αν η αρχική κατάσταση είναι μία από τις S_0, S_3, S_4, S_5 , τότε το σύστημα θα επισκεφθεί σίγουρα την S_0 . Επιπλέον, αν η αρχική κατάσταση είναι η S_1 , τότε το σύστημα όντως δεν επισκέπτεται ποτέ την S_0 , ενώ αν η αρχική κατάσταση είναι η S_2 , για να μην επισκεφτεί την S_0 θα πρέπει να παραμείνει για ένα αφθαίρετο χρονικό διάστημα στην S_2 , και κάποια στιγμή να μεταπηδήσει στην S_1 . Επομένως,

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{18}$$

- γ) Έστω A το ζητούμενο γεγονός. Για να συμβεί το A , θα πρέπει να ξεκινήσουμε από μία από τις S_2, S_3, S_4, S_5 . Αν ξεκινήσουμε από την S_2 , θα πρέπει να παραμείνουμε στην S_2 μέχρι να μεταβούμε στην S_3 , ενώ από την S_3 θα μεταβούμε σίγουρα στην S_4 και από εκεί στην S_5 . Για τον ίδιο λόγο, αν ξεκινήσουμε από την S_3 ή την S_4 ή την S_5 , το ζητούμενο ενδεχόμενο σίγουρα θα συμβεί. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{6} \\ &= \frac{22}{36} \end{aligned}$$

- δ) Το γεγονός αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί εαν γίνουν διαδοχικά οι μεταβάσεις $S_4 \rightarrow S_5 \rightarrow S_1$. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{18}$.

Άσκηση 2

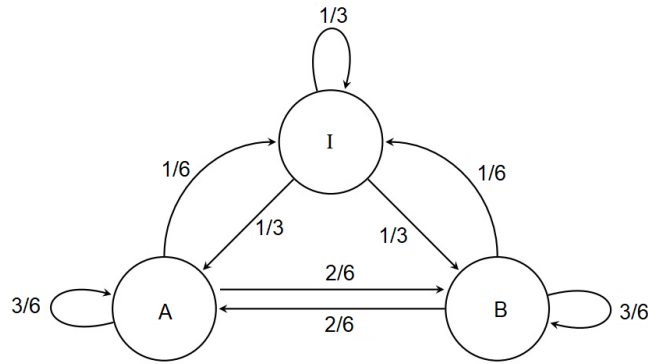
Δύο φίλοι, ο Βασίλης και η Αλίκη, ανταγωνίζονται για χρόνια στο σκάκι και έχουν κάνει την εξής συμφωνία. Κάθε πρώτη Κυριακή του μήνα θα παίζουν μία παρτίδα σκάκι και θα καταγράφουν τις νίκες τους. Εμπειρικά, έχουν δει ότι αν κάποιος από τους δύο κερδίσει τον ένα μήνα, τον επόμενο μήνα θα χάσει με πιθανότητα $2/6$, θα κερδίσει με πιθανότητα $3/6$ και θα έρθουν ισοπαλία με πιθανότητα $1/6$. Αν κάποιον μήνα έρθουν ισοπαλία, τον επόμενο μήνα κερδίζει ένας από τους δύο με ίση πιθανότητα $1/3$ ή έρχονται ξανά ισοπαλία με πιθανότητα $1/3$.

- α) Έστω A και B τα ενδεχόμενα να κερδίσει η Αλίκη και ο Βασίλης αντίστοιχα και I το ενδεχόμενο της ισοπαλίας. Μοντελοποιήστε τα αποτελέσματα των παρτίδων με μία Μαρκοβιανή αλυσίδα και δώστε τον πίνακα μεταβάσεων.
- β) Ποια η πιθανότητα ότι, ανεξαρτήτως του αποτελέσματος του πρώτου παιχνιδιού, στο μακρινό μέλλον οι δύο παίκτες θα έρθουν ισοπαλία;
- γ) Οι δύο παίκτες μετράνε πόσες φορές έχουν κερδίσει συνολικά. Έστω N_A και N_B το σύνολο των νικών των δύο παιχτών. Θέλουμε να μελετήσουμε την διαφορά $\Delta = N_A - N_B$. Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την ακολουθία Δ_t , $t = 0, 1, 2, \dots$ ως μία αλυσίδα Μαρκόβ; Αν ναι, δώστε την αλυσίδα και τον πίνακα μεταβάσεων

Λύση

- α) Η Μαρκοβιανή αλυσίδα μοντελοποιείται όπως φαίνεται στο Σχήμα (1). Θεωρώντας την σειρά των καταστάσεων A, B, I στον πίνακα μεταβάσεων, έχουμε

$$P = \begin{bmatrix} 3/6 & 2/6 & 1/6 \\ 2/6 & 3/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 1: Η Μαρκοβιανή αλυσίδα για τα αποτελέσματα των παρτίδων.

β) Οι εξισώσεις ισορροπίας $\pi = \pi \cdot P$ είναι οι εξής,

$$\begin{aligned}\pi_A &= \frac{3}{6}\pi_A + \frac{2}{6}\pi_B + \frac{1}{3}\pi_I \\ \pi_B &= \frac{2}{6}\pi_A + \frac{3}{6}\pi_B + \frac{1}{3}\pi_I \\ \pi_I &= \frac{1}{6}\pi_A + \frac{1}{6}\pi_B + \frac{1}{3}\pi_I \\ 1 &= \sum_i \pi_i.\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε ότι $\pi_A = 0.4, \pi_B = 0.4, \pi_I = 0.2$. Άρα η οριακή πιθανότητα ότι στο μακρινό μέλλον οι δύο παίκτες θα έρθουν ισοπαλία είναι 20%.

γ) Η ακολουθία Δ_t δεν ικανοποιεί την Μαρκοβιανή ιδιότητα, και επομένως δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια αλυσίδα Μαρκόβ. Για να το δείξουμε αυτό, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}P(\Delta_{t+1} = \Delta_t + 1 | \Delta_t = \Delta_{t-1} + 1) &= \frac{3}{6} \\ P(\Delta_{t+1} = \Delta_t + 1 | \Delta_t = \Delta_{t-1} - 1) &= \frac{2}{6} \\ P(\Delta_{t+1} = \Delta_t + 1 | \Delta_t = \Delta_{t-1}) &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

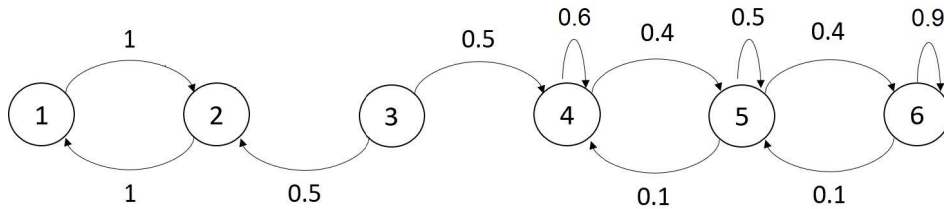
Με άλλα λόγια, με δεδομένο το Δ_t , το Δ_{t+1} συνεχίζει να εξαρτάται από το παρελθόν.

Άσκηση 3

Μια αλυσίδα Markov με 6 καταστάσεις $\{S_1, \dots, S_6\}$ περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

- Σχεδιάστε το γράφημα της αλυσίδας αυτής και αναγνωρίστε τις έμμονες και τις μεταβατικές καταστάσεις. Επίσης, προσδιορίστε τις επικοινωνιακές κλάσεις και βρείτε ποιες από αυτές είναι περιοδικές.
- Υπάρχουν στατικές πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1; Αν ναι, ποιες είναι αυτές;
- Υπάρχουν στατικές πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 5; Αν ναι, ποιες είναι αυτές;



Σχήμα 2: Το γράφημα της αλυσίδας για την Άσκηση 1.

Λύση

- α) Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα, η κατάσταση 3 είναι μεταβατική, ενώ όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι έμμονες. Υπάρχουν δύο κλάσεις έμμονων καταστάσεων. Η κλάση $\{1, 2\}$ που είναι περιοδική με περίοδο 2, και η κλάση $\{4, 5, 6\}$ που είναι απεριοδική.
- β) Επειδή η κλάση 1, 2 είναι περιοδική, δεν υπάρχουν στατικές πιθανότητες. Συγκεκριμένα, η ακολουθία πιθανοτήτων μετάβασης στην κατάσταση 1, r_{11} , εναλλάσσεται μεταξύ 0 και 1 και δε συγκλίνει.
- γ) Αν η διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση 4, μένει μέσα στην απεριοδική κλάση έμμονων καταστάσεων $\{4, 5, 6\}$ και οι πιθανότητες n -οστής μετάβασης συγκλίνουν στις στατικές πιθανότητες π_i .

Έχουμε $\pi_i = 0$ για $i \notin \{4, 5, 6\}$.

Άρα, οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\pi_4 = 0.6\pi_4 + 0.1\pi_5$$

$$\pi_5 = 0.4\pi_4 + 0.5\pi_5 + 0.1\pi_6$$

$$\pi_6 = 0.4\pi_5 + 0.9\pi_6$$

$$1 = \pi_4 + \pi_5 + \pi_6$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων, παίρνουμε $\pi_4 = \frac{1}{21}$, $\pi_5 = \frac{4}{21}$, $\pi_6 = \frac{16}{21}$.

Άσκηση 4.

Σε ένα μικρό χωριό που ονομάζεται Ποταμιά, υπάρχει ένας πληθυσμός κουνελιών που ζει στην όχθη του ποταμού. Ο πληθυσμός των κουνελιών μπορεί φυσιολογικά κάθε μέρα να αυξηθεί μέσω των γεννήσεων ή να μειωθεί μέσω των θανάτων. Αν ο πληθυσμός ξεπεράσει τα 5, τότε οι κάτοικοι παίρνουν αμέσως τα περίσσια κουνέλια για τροφή, αφήνοντας πίσω 5. Επομένως ο πληθυσμός δεν ξεπερνάει ποτέ τα 5. Επίσης, οι κάτοικοι φροντίζουν, σε περίπτωση που ο πληθυσμός πέσει στο 1, την επόμενη μέρα να φέρνουν πάντα ένα επιπλέον κουνέλι από τις κοινές περιοχές για να συνεχιστεί η αναπαραγωγή.

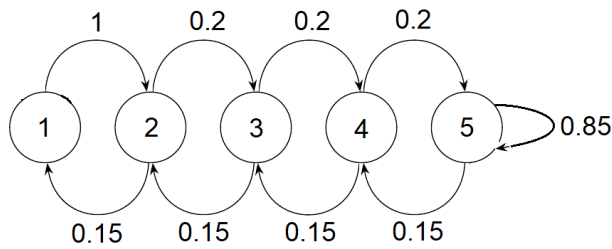
Το συμβούλιο του χωριού παρατήρησε ότι ο πληθυσμός των κουνελιών αλλάζει σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες: Κάθε μέρα, στα κουνέλια προστίθεται ένα νέο μέλος με πιθανότητα 0.25 και πεθαίνει ένα από τα υπάρχοντα με πιθανότητα 0.2, ανεξάρτητα από το τρέχον μέγεθος πληθυσμού.

Το συμβούλιο αποφάσισε να δημιουργήσει μια αλυσίδα γέννησης-θανάτου Μάρκοβ για να μοντελοποιήσει τον πληθυσμό των κουνελιών στην Ποταμιά.

- α) Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει το πλήθος των κουνελιών και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα μετάβασης.
- β) Βρείτε την κατανομή σταθερής κατάστασης του συστήματος.

Λύση

- (α) Παρατηρούμε ότι για να αυξηθεί ο πληθυσμός, θα πρέπει να γεννηθεί ένα κουνέλι και να μην πεθάνει κανένα. Αντίστοιχα, για να μειωθεί ο πληθυσμός, θα πρέπει να πεθάνει ένα κουνέλι και να μην γεννηθεί κανένα.



Σχήμα 3: Η αλυσίδα για τον πληθυσμό των κουνελιών

νένα. Επομένως, οι οι πιθανότητες μετάβασης της αλυσίδας (Σχήμα 3) είναι οι εξής:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.65 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.65 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15 & 0.65 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0.65 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$$

(β) Οι εξισώσεις ισορροπίας για την αλυσίδα γεννήσεως-θανάτου δίνονται από

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \pi_1 \frac{1}{0.15} \\ \pi_3 &= \pi_1 \frac{1 \cdot 0.2}{0.15 \cdot 0.15} \\ \pi_4 &= \pi_1 \frac{1 \cdot 0.2 \cdot 0.2}{0.15 \cdot 0.15 \cdot 0.15} \\ \pi_5 &= \pi_1 \frac{1 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2}{0.15 \cdot 0.15 \cdot 0.15 \cdot 0.15} \\ 1 &= \sum_i \pi_i \end{aligned}$$

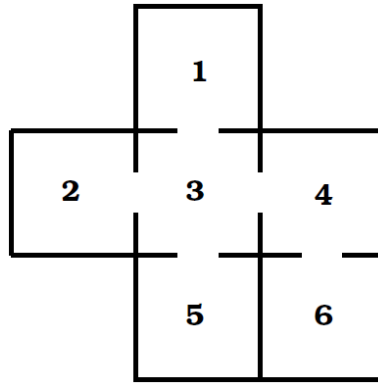
Επομένως,

$$\begin{aligned} \pi_1 \left(1 + \frac{1}{0.15} + \frac{1 \cdot 0.2}{0.15 \cdot 0.15} + \frac{1 \cdot 0.2 \cdot 0.2}{0.15 \cdot 0.15 \cdot 0.15} + \frac{1 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2}{0.15 \cdot 0.15 \cdot 0.15 \cdot 0.15} \right) &= 1 \\ \Rightarrow \pi_1 &\approx 0.023 \\ \pi_2 &\approx 0.150 \\ \pi_3 &\approx 0.201 \\ \pi_4 &\approx 0.268 \\ \pi_5 &\approx 0.357. \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Ένα ποντίκι διατρέχει το λαβύρινθο που φαίνεται παρακάτω. Σε κάθε βήμα φεύγει από το δωμάτιο, επιλέγοντας τυχαία μία από τις πόρτες του δωματίου που βρίσκεται.

- Δώστε τον πίνακα μετάβασης για αυτή την αλυσίδα Markov.
- Αναγνωρίστε τις κλάσεις έμμονων καταστάσεων της αλυσίδας αυτής και χαρακτηρίστε τις ως περιοδικές ή απεριοδικές. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- Βρείτε τη στατική κατανομή στο χώρο καταστάσεων της αλυσίδας.



Λύση

α) Ο πίνακας μετάβασης είναι ο εξής,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

β) Η αλυσίδα αποτελεί μια κλάση έμμονων καταστάσεων καθώς κάθε κατάσταση είναι προσιτή από όλες τις άλλες καταστάσεις. Ωστόσο, δεν είναι περιοδική καθώς οι καταστάσεις της δεν μπορούν να ομαδοποιηθούν σε ξένα υποσύνολα ώστε όλες οι μεταβάσεις από το ένα υποσύνολο να οδηγούν στο επόμενο.

γ) Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 1/4\pi_3 \\ \pi_2 &= 1/4\pi_3 \\ \pi_3 &= \pi_1 + \pi_2 + 1/2\pi_4 + \pi_5 \\ \pi_4 &= 1/4\pi_3 + \pi_6 \\ \pi_5 &= 1/4\pi_3 \\ \pi_6 &= 1/2\pi_4 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων, παίρνουμε $\pi_1 = 0.1$, $\pi_2 = 0.1$, $\pi_3 = 0.4$, $\pi_4 = 0.2$, $\pi_5 = 0.1$, $\pi_6 = 0.1$.

Άσκηση 6

Σε αυτήν την άσκηση θα χρησιμοποιήσετε το μοντέλο της Άσκησης 5 για να προσομοιώσετε μερικές 'διαδρομές' του ποντικιού μέσα στον λαβύρινθο. Πιο συγκεκριμένα,

- Ορίστε τον πίνακα μεταβάσεων P και θεωρήστε μια κατανομή $starting_pos$ για την αρχική κατάσταση. Για παράδειγμα, αν θέλετε η αρχική κατάσταση να είναι πάντα η 3, τότε θα πρέπει $starting_pos = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$, ενώ αν θέλετε να είναι είτε η 1 είτε η 2 με ίση πιθανότητα, θα πρέπει $starting_pos = [0.5 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Δημιουργήστε επίσης ένα διάνυσμα $visits$ μήκους 6, στο οποίο θα μετράτε πόσες φορές έχετε επισκεφθεί κάθε θέση στον λαβύρινθο.
- Θα επιλέξετε μία αρχική κατάσταση σύμφωνα με την κατανομή που έχετε ορίσει, και θα ακολουθήσετε μια τυχαία διαδρομή στον λαβύρινθο μήκους $t = 25$, $t = 100$ και $t = 10000$. Σε κάθε βήμα της διαδρομής, θα χρησιμοποιείτε την σωστή γραμμή του πίνακα P για να επιλέξετε (τυχαία) την θέση σας στο επόμενο βήμα.
- Επαναλάβετε $k = 100$ φορές το πείραμά σας, κάθε φορά επιλέγοντας ανεξάρτητα την αρχική κατάσταση σύμφωνα με την κατανομή σας. Στο τέλος, θα πρέπει να έχετε αποθηκεύσει στο διάνυσμα $visits$ τον αριθμό των επισκέψεων σε κάθε θέση, για το σύνολο των διαδρομών.

- δ) Για την αναφορά σας, θα παράξετε ένα γράφημα με μπάρες (π.χ. στην *MATLAB* χρησιμοποιήστε την εντολή *bar*), όπου θα δείχνετε τις εμπειρικές πιθανότητες επίσκεψης κάθε θέσης για τις διαδρομές μήκους $t = 25$, $t = 100$ και $t = 10000$. Οι κατανομές που σας ζητούνται να χρησιμοποιήσετε είναι οι εξής: (i) $[1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$, (ii) $[0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]$, (iii) $[0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]$, (iv) $[0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]$, (v) $[0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]$, (vi) $[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]$, (vii) η στατική κατανομή που βρήκατε στην προηγούμενη άσκηση, (viii) οποιαδήποτε άλλη θέλετε εσείς να δοκιμάσετε.
- ε) Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας. Προσέξτε ότι έχετε μετρήσει τους αριθμούς των επισκέψεων σε κάθε κατάσταση σε όλο το μήκος των διαδρομών. Πώς σχετίζεται αυτό με την στατική κατανομή;