

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/05/2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 29/05/2023

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, [εδώ](#). Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκανάρσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Φανταστείτε ότι πηγαίνετε από το σπίτι σας στο πανεπιστήμιο, και πίσω, έχοντας 4 ομπρέλες. Κάθε φορά, αν βρέχει παίρνετε μαζί σας μία ομπρέλα, αλλιώς δεν παίρνετε. Υπάρχει περίπτωση όλες οι ομπρέλες να είναι σε ένα μέρος και εσείς στο άλλο, τότε αν βρέχει και πρέπει να φύγετε, θα βραχείτε.

- Σχεδιάστε το πλήρες γράφημα της παραπάνω Μαρκοβιανής αλυσίδας (με πιθανότητα να βρέξει ίση με p) και παραθέστε και τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Ποιές από τις καταστάσεις είναι έμμονες και ποιές μεταβατικές;
- Ποια η στατική κατανομή της παραπάνω Μαρκοβιανής αλυσίδας;
- Αν η πιθανότητα να βρέξει είναι ίση με p , ποιά είναι η πιθανότητα να βραχείτε;
- Πρόσφατες προβλέψεις δείχνουν ότι η πιθανότητα να βρέξει είναι $p = 0.6$. Πόσες ομπρέλες πρέπει να έχετε έτσι ώστε ακολουθώντας την παραπάνω στρατηγική, η πιθανότητα να βραχείτε να είναι μικρότερη από 1%;

Άσκηση 2

Θεωρήστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Σχεδιάστε το πλήρες γράφημα της παραπάνω Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ποιές από τις καταστάσεις είναι έμμονες και ποιές μεταβατικές; Ποιές είναι οι κλάσεις επικοινωνίας και ποιές είναι περιοδικές;
- Ποιες είναι οι οριακές πιθανότητες δεδομένου ότι η αλυσίδα αρχίζει στην κατάσταση 3;
- Έστω ότι η αλυσίδα αρχίζει στην κατάσταση 3, ποια είναι η πιθανότητα ότι η n -οστή μετάβαση θα είναι μετάβαση στην ίδια κατάσταση (αυτομετάβαση), δηλαδή μετάβαση από την κατάσταση i στην κατάσταση i .

- (δ) Ορίζουμε το χρόνο T να είναι το πρώτο n για το οποίο ισχύει ότι $X_n \in \{3, 4, 5\}$. Υπολογίστε την πιθανότητα της τυχαίας μεταβλητής T , δεδομένου ότι $X_0 = 1$.
- (ε) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X_n = 5 | X_0 = 1)$.
- (στ) Υπολογίστε τον μέσο χρόνο απορρόφησης ξεκινώντας από την κατάσταση 1 και την κατάσταση 2. Αν κερδίζατε 1 ευρώ για κάθε μετάβαση στην 1 και 2 ευρώ για κάθε μετάβαση στην 2, ποιο είναι το μέσο κερδός σας για κάθε μια από τις αρχικές καταστάσεις 1 και 2;

Άσκηση 3

Έστω ότι παίζετε ένα παιχνίδι με 4 πίστες, τις 1 (αρχική), 2, 3 και 4. Σε κάθε πίστα έχετε 1 λεπτό να την περάσετε. Μπορείτε να περάσετε την πίστα και να πάτε στην επόμενη, να τελειώσει ο χρόνος και να πρέπει να ξαναπαίξετε την ίδια πίστα από την αρχή ή να χάσετε, χωρίς όμως να μπορείτε να ξαναπαίξετε το παιχνίδι! Έχουν καταγραφεί κάποια στατιστικά για το συγκεκριμένο παιχνίδι, τα οποία μας δείχνουν ότι με πιθανότητα 0.3 ένας παίκτης μπορεί να περάσει την 1η πίστα και να πάει στη 2η, να χάσει με πιθανότητα 0.1 ή να τελειώσει ο χρόνος και να επαναλάβει την πίστα από την αρχή. Τη 2η πίστα ο παίκτης μπορεί να την περάσει με πιθανότητα 0.2, να χάσει με 0.15 ή να τελειώσει ο χρόνος του. Από την 3η πίστα πηγαίνει στην 4η με πιθανότητα 0.05, χάνει με πιθανότητα 0.2 ή τελειώνει ο χρόνος του. Τέλος, η 4η πίστα δεν έχει χρόνο. Επειδή όμως είναι και η πιο δύσκολη, ο κάθε παίκτης έχει μια επιπλέον ζωή. Μπορεί δηλαδή, είτε να περάσει την πίστα με πιθανότητα 0.6 και να νικήσει το παιχνίδι, είτε να προσπαθήσει άλλη μία φορά. Τη δεύτερη φορά, ο παίκτης είτε περνάει επιτυχώς την πίστα με πιθανότητα 0.8 είτε χάνει οριστικά.

- (α) Ορίστε την πορεία των παικτών σε αυτό το παιχνίδι με τη βοήθεια μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας.
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα, ξεκινώντας από την 1η πίστα, να φτάσετε στην 4η το πολύ σε 8 προσπάθειες (συναρτήσει ενός πίνακα μετάβασης).
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα να νικήσετε το παιχνίδι.
- (δ) Υπολογίστε τον μέσο αριθμό προσπαθειών που κάνει κάποιος παίκτης στο παιχνίδι.

Άσκηση 4

Ρίχνετε ένα δίκαιο ζάρι επαναλαμβανόμενα και ανεξάρτητα. Υπολογίστε τον μέσο αριθμό ρίψεων μέχρι να ξανατύχει ο ίδιος αριθμός.

Άσκηση 5

Υλοποιήστε προγραμματιστικά την Μαρκοβιανή αλυσίδα της Άσκησης 3, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους θεωρητικούς τύπους, καθώς και έτοιμες συναρτήσεις, βιβλιοθήκες και toolboxes που αφορούν Μαρκοβιανές αλυσίδες. Απαντήστε στα ερωτήματα (γ) και (δ) πειραματικά και συγκρίνετε τα αποτελέσματα των πειραμάτων σας με τις θεωρητικές τιμές που έχετε ήδη υπολογίσει στην Άσκηση 3. Ενδεικτικά βήματα είναι τα εξής:

- Ορίστε μία μεταβλητή P ως τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης της αλυσίδας Markov.
- Προσομοιώστε για έναν επαρκή αριθμό από φορές (1000 προσομοιώσεις είναι αρκετές, μπορείτε να προσπαθήσετε και περισσότερες για πιο ακριβή αποτελέσματα) την Μαρκοβιανή αλυσίδα που έχετε ορίσει. Κάθε προσομοίωση ξεκινά από την αρχική κατάσταση 1 και ολοκληρώνεται έως ότου υπάρξει απορρόφηση από κλάση επικοινωνίας.
Hint: Με τη χρήση της συνάρτησης *rand* μπορείτε να μοντελοποιήσετε την τυχαιότητα μετάβασης από μία κατάσταση s_i σε μία κατάσταση s_{i+1} . Συνδυάζοντας κατάλληλα τις συναρτήσεις *find*, *cumsum*, τη σωστή, κάθε φορά, γραμμή του πίνακα P και το αποτέλεσμα της *rand* θα μπορείτε να αποφανθείτε ποια θα είναι η εκάστοτε κατάσταση s_{i+1} σε κάθε βήμα της προσομοίωσής σας.
- Αξιοποιώντας τη μέθοδο της σχετικής συχνότητας (εκ των υστέρων ορισμός πιθανότητας) υπολογίστε πειραματικά την πιθανότητα να νικήσετε το παιχνίδι, στο σύνολο των 1000 προσομοιώσεων.
- Υπολογίστε για κάθε προσομοίωση το πλήθος των μεταβάσεων μέχρι να βγει κάποιος παίκτης από το παιχνίδι. Αφού ολοκληρώσετε τις 1000 προσομοιώσεις υπολογίστε τον μέσο όρο των μεταβάσεων και άρα το μέσο αριθμό προσπαθειών που κάνει κάποιος παίκτης στο παιχνίδι.

Προσεγγίζουν οι πειραματικές τιμές που υπολογίσατε τις αντίστοιχες θεωρητικές; Παραθέστε τον κώδικά σας μαζί με τα υπόλοιπα παραδοτέα της σειράς ασκήσεων.