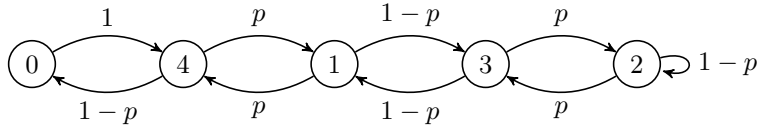


ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Ενδεικτικές Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1



Σχήμα 1: Μαρκοβιανή Αλυσίδα, Άσκηση 1

(α) Έστω ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα X μοντελοποιείται με τις ακόλουθες καταστάσεις:

- κατάσταση i : i ομπρέλες υπάρχουν στην παρούσα τοποθεσία, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Έτσι, ο πίνακας μετάβασης έχει ως εξής:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & p \\ 0 & 0 & 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και η αλυσίδα φαίνεται στο Σχήμα 1.

Όλες οι καταστάσεις είναι έμμενες.

(β) Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} &= \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{P} \Rightarrow [\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4] = [\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4] \cdot \mathbf{P} \\ &\Rightarrow \pi_0 = (1-p) \cdot \pi_4 \\ \pi_1 &= p \cdot \pi_4 + (1-p) \cdot \pi_3 \\ \pi_2 &= p \cdot \pi_3 + (1-p) \cdot \pi_2 \\ \pi_3 &= p \cdot \pi_2 + (1-p) \cdot \pi_1 \\ \pi_4 &= p \cdot \pi_1 + \pi_0 \\ &\Rightarrow \pi_0 = (1-p) \cdot \pi_4 \\ \pi_1 &= \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 \end{aligned}$$

και

$$\sum_{i=0}^4 \pi_i = 1 \Rightarrow 4 \cdot \pi_4 + \pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = 1 - 4 \cdot \pi_4 \Rightarrow (1-p) \cdot \pi_4 = 1 - 4 \cdot \pi_4 \Rightarrow \pi_4 = \frac{1}{5-p}.$$

Άρα η στατική κατανομή είναι $\pi_0 = \frac{1-p}{5-p}$ και $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \frac{1}{5-p}$.

(γ) Θα βρεχόμαστε κάθε φορά που είμαστε στην κατάσταση 0 και βρέχει. Η πιθανότητα να βρισκόμαστε στην κατάσταση 0 είναι π_0 , ανεξάρτητη της πιθανότητας να βρέξει, η οποία είναι p .

Άρα,

$$P(\text{βρεχόμαστε}) = \pi_0 \cdot p = \frac{(1-p)p}{5-p}.$$

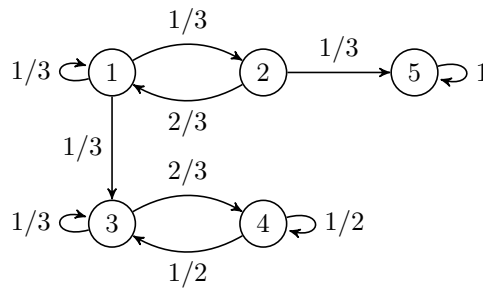
- (δ) Για $p = 0.6$ έχουμε ότι $P(\text{βρεχόμαστε}) \approx 5.45\%$. Είναι προφανές ότι για να έχουμε μικρότερη από 1% πιθανότητα να βραχούμε, χρειαζόμαστε περισσότερες ομπρέλες. Αν δημιουργήσουμε με Μαρκοβιανή αλυσίδα, όπως προηγουμένως, αλλά με k καταστάσεις, θα έχουμε $\pi_0 = \frac{1-p}{k+1-p}$ και $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \frac{1}{k+1-p}$, με $P(\text{βρεχόμαστε}) = \pi_0 \cdot p = \frac{(1-p)p}{k+1-p}$. Άρα,

$$P(\text{βρεχόμαστε}) < 0.01 \Rightarrow \frac{(1-p)p}{k+1-p} < 0.01 \Rightarrow k+1-p > 100(1-p)p \Rightarrow k > 23.6.$$

Συνεπώς, χρειαζόμαστε τουλάχιστον 24 ομπρέλες!

Άσκηση 2

- (α) Το πλήρες γράφημα της Μαρκοβιανής αλυσίδας φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Μαρκοβιανή Αλυσίδα, Άσκηση 2

Οι καταστάσεις 1 και 2 είναι μεταβατικές, ενώ οι 3, 4 και 5 είναι έμμονες.

Οι $\{3, 4\}$ αποτελούν μια κλάση και η 5 αποτελεί άλλη μια κλάση. Οι κλάσεις αυτές δεν είναι περιοδικές.

- (β) Λύνουμε τις εξισώσεις ισορροπίας για την κλάση $\{3, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} \pi_3 & \pi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_3 & \pi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4.$$

Ακόμα, $\pi_3 + \pi_4 = 1$, συνεπώς $\pi_3 = \frac{3}{7}$ και $\pi_4 = \frac{4}{7}$.

- (γ) Αρχίζουμε από την κατάσταση 3, άρα βρισκόμαστε στην κλάση $\{3, 4\}$. Θα έχουμε αυτομετάβαση όταν έχουμε μετάβαση από την 3 στην 3 ή από την 4 στην 4. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4 = \frac{3}{7}.$$

- (δ) Το T είναι ο χρόνος έως την απορρόφηση του συστήματος από την κλάση $\{3, 4\}$ ή την κατάσταση 5. Αν παρατηρήσουμε το γράφημα, βλέπουμε ότι μεταβαίνουμε σε μια έμμονη κατάσταση (την 3 ή την 5) με πιθανότητα $1/3$. Συνεπώς η T ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $1/3$:

$$p_T(n) = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- (ε) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα απορροφήσεως από την $s = 5$, ξεκινώντας από την $i = 1$. Άρα,

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= 1 \\ \alpha_3 &= \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 &= \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3 \\ \alpha_1 &= \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_5 \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων έχουμε ότι $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ και $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Οπότε, $P(X_n = 5 | X_0 = 1) = \alpha_1 = \frac{1}{4}$.

(στ) Ο μέσος χρόνος απορροφήσεως ξεκινώντας από την κατάσταση 1 και την κατάσταση 2 είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 1 + \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2, \\ \mu_2 &= 1 + \frac{2}{3}\mu_1.\end{aligned}$$

Οπότε, $\mu_1 = \mu_2 = 3$.

Παρόμοια, το μέσο κέρδος για κάθε μια από τις αρχικές καταστάσεις 1 και 2 είναι:

$$\begin{aligned}g_1 &= 1 + \frac{1}{3}g_1 + \frac{1}{3}g_2, \\ g_2 &= 2 + \frac{2}{3}g_1.\end{aligned}$$

Οπότε, $g_1 = 3.75$ ευρώ και $g_2 = 4.5$ ευρώ.

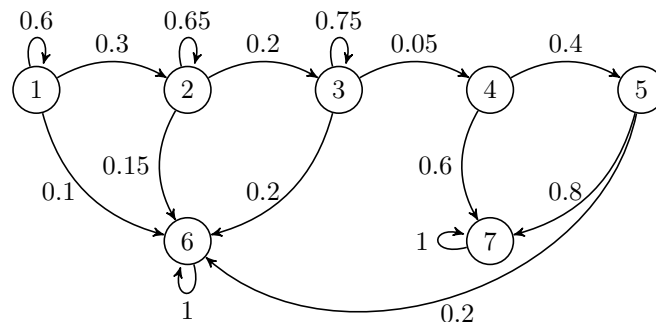
Άσκηση 3

(α) Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα X με τις παρακάτω καταστάσεις:

- 1: παίκτης στην 1η πίστα
- 2: παίκτης στην 2η πίστα
- 3: παίκτης στην 3η πίστα
- 4: παίκτης στην 4η πίστα (1η προσπάθεια)
- 5: παίκτης στην 4η πίστα (2η προσπάθεια)
- 6: ήττα
- 7: νίκη

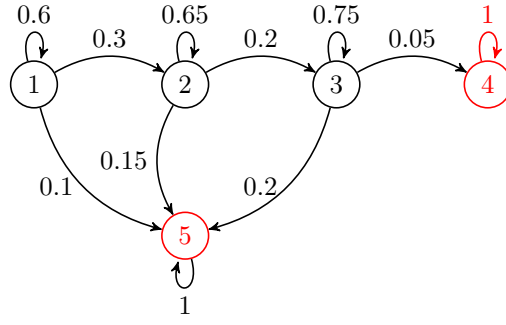
και το πλήρες γράφημά της φαίνεται στο Σχήμα 3 και ο πίνακας μετάβασης έχει ως εξής:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.65 & 0.2 & 0 & 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0.05 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 3: Μαρκοβιανή Αλυσίδα, Άσκηση 3(α)

- (β) Για τους σκοπούς του προβλήματος, οι πιθανές μεταβάσεις του συστήματος στις καταστάσεις 5 και 7 δεν μας αφορούν. Επομένως, μπορούμε να τροποποιήσουμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα, αφαιρώντας τις καταστάσεις 5 και 7 και κάνοντας την 4 κατάσταση απορροφήσεως, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.



Σχήμα 4: Μαρκοβιανή Αλυσίδα, Άσκηση 3(β)

Με βάση αυτό το μοντέλο, ο πίνακας μετάβασης έχει ως εξής:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.65 & 0.2 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0.05 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οπότε, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(\tilde{X}_8 = 4 | \tilde{X}_0 = 1) = \tilde{r}_{14}(8) = \left(\tilde{\mathbf{P}}^8 \right)_{14}. \quad (\approx 0.0435)$$

- (γ) Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχική Μαρκοβιανή αλυσίδα. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα απορροφήσεως από την κατάσταση 7, ξεκινώντας από την κατάσταση 1. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\alpha_1 = P(X_n = 7 | X_0 = 1).$$

Έχουμε ότι:

- $\alpha_7 = 1$
- $\alpha_6 = 0$
- $\alpha_i = \sum_{j=1}^7 \mathbf{P}_{ij} \alpha_j$, για κάθε μεταβατική κατάσταση i .
(Οι μεταβατικές καταστάσεις είναι οι 1, 2, 3, 4 και 5.)

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.6\alpha_1 + 0.3\alpha_2 \\ \alpha_2 &= 0.65\alpha_2 + 0.2\alpha_3 \\ \alpha_3 &= 0.75\alpha_3 + 0.05\alpha_4 \\ \alpha_4 &= 0.4\alpha_5 + 0.6 \\ \alpha_5 &= 0.8 \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.07875 \\ \alpha_2 &= 0.105 \\ \alpha_3 &= 0.184 \\ \alpha_4 &= 0.92 \\ \alpha_5 &= 0.8. \end{aligned}$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $\alpha_1 = 0.07875$.

- (δ) Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι την αρχική Μαρκοβιανή αλυσίδα. Η ζητούμενη ποσότητα είναι ίση με τον μέσο αριθμό μεταβάσεων έως την επίσκεψη μια έμμονης κατάστασης, ξεκινώντας από την κατάσταση 1. Έχουμε ότι:

- $\mu_6 = \mu_7 = 0$ (Οι έμμονες καταστάσεις είναι η 6 και η 7.)

- $\mu_i = 1 + \sum_{j=1}^7 \mathbf{P}_{ij}\mu_j$, για κάθε μεταβατική κατάσταση i .

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 1 + 0.6\mu_1 + 0.3\mu_2 \\ \mu_2 &= 1 + 0.65\mu_2 + 0.2\mu_3 \\ \mu_3 &= 1 + 0.75\mu_3 + 0.05\mu_4 \\ \mu_4 &= 1 + 0.4\mu_4 \\ \mu_5 &= 1\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 1 \\ \mu_2 &= 1.4 \\ \mu_3 &= 4.28 \\ \mu_4 &= 5.3 \\ \mu_5 &= 6.475.\end{aligned}$$

Άρα, ο μέσος αριθμός προσπαθειών ενός παίκτη στο παιχνίδι είναι $\mu_5 = 6.475$.

Άσκηση 4

Έχουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με καταστάσεις $1, 2, \dots, 6$ και πιθανότητες μετάβασης $P_{ij} = \frac{1}{6}$, για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, 6$.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον μέσο αριθμό ρίψεων αν έχουμε τύχει 6 και θέλουμε να ξανατύχει 6. Ο μέσος ψρόνος πρώτης μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση 6 ορίζεται ως t_i και ισχύει ότι:

- $t_6 = 0$,
- $t_i = 1 + \sum_{j=1}^6 P_{ij}t_j$, για κάθε $i \neq 6$.

Άρα, έχουμε ότι

$$t_i = 1 + \frac{1}{6}t_1 + \frac{1}{6}t_2 + \frac{1}{6}t_3 + \frac{1}{6}t_4 + \frac{1}{6}t_5, \text{ για κάθε } i \neq 6,$$

οπότε

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = t \Rightarrow t = 1 + \frac{5}{6}t \Rightarrow t = 6.$$

Συνεπώς, ο μέσος χρόνος πρώτης επανόδου της κατάστασης 6 είναι:

$$t_6^* = 1 + \sum_{j=1}^6 P_{ij}t_j \Rightarrow t_6^* = 6.$$

Η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι συμμετρική, άρα ισχύει το ίδιο για όλες τις καταστάσεις $1, 2, \dots, 6$. Οπότε, ο μέσος αριθμός ρίψεων του ζαριού μέχρι να ξανατύχει ο ίδιο αριθμός είναι 6.

Άσκηση 5

Κώδικας MATLAB:

```
1 clear;
2
3 P = [0.6 0.3 0 0 0 0.1 0;
4      0 0.65 0.2 0 0 0.15 0;
5      0 0 0.75 0.05 0 0.2 0;
6      0 0 0 0 0.4 0 0.6;
7      0 0 0 0 0 0.2 0.8;
8      0 0 0 0 0 1 0;
9      0 0 0 0 0 0 1];
10
11 num_iters = 1e4; total_transitions = 0; times_won = 0;
```

```

12
13 init_state = 1;
14 for iter = 1:num_iters
15     curr_state = init_state;
16
17     while ( (curr_state~=6) && (curr_state~=7) ) % not in absorption state
18         curr_state = find(rand <= cumsum(P(curr_state,:)), 1); % go to the next state
19         total_transitions = total_transitions+1;
20     end
21
22     if curr_state == 7
23         times_won = times_won+1;
24     end
25 end
26
27 prob_win = times_won / num_iters;
28 average_time_in_game = total_transitions / num_iters;

```