

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
7 Ιουνίου 2023- Διάρκεια: 2.5 Ωρες

Θέμα 1 - 30 μονάδες.

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας τριών καταστάσεων

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

(α) Δώστε το γράφημα αυτής της αλυσίδας.

(β) Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 3, X_4 = 1 | X_0 = 2)$.

(γ) Να λύσετε τις εξισώσεις ισορροπίας για να υπολογίσετε τις οριακές (στατικές) πιθανότητες. Μακροπρόθεσμα, με ποια πιθανότητα βρίσκεται η αλυσίδα σε κάθε μία από τις τρεις καταστάσεις;

Θέμα 2 - 30 μονάδες.

Στο κυλικείο του Πανεπιστημίου υπάρχει μόνο ένα ταμείο. Λόγω του περιορισμένου χώρου, το πολύ m πελάτες επιτρέπεται να βρίσκονται στην ουρά αναμονής για εξυπηρέτηση. Δηλαδή αν ένας πελάτης βρει m άτομα στην ουρά, συμπεριλαμβανομένου και αυτού που εξυπηρετείται από τον ταμεία, φεύγει από το κυλικείο. Κάθε λεπτό της ώρας, ακριβώς ένα από τα ακόλουθα μπορεί να συμβεί:

- ένας νέος πελάτης καταφθάνει με πιθανότητα p
- ένας υπάρχων πελάτης φεύγει με πιθανότητα kq όπου k είναι το πλήθος των πελατών στη ουρά
- κανείς νέος πελάτης δεν καταφθάνει και κανείς υπάρχων πελάτης δεν φεύγει, με πιθανότητα $1 - p - kq$ αν υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης στη ουρά και με πιθανότητα $1 - p$ αν δεν υπάρχει κάποιος πελάτης στην ουρά.

(α) Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως την ουρά αναμονής. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις και δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές. Τι είδους αλυσίδα προκύπτει;

(β) Γράψτε τις τοπικές εξισώσεις ισορροπίας και υπολογίστε τη στατική κατανομή της αλυσίδας.

(γ) Σε βάθος χρόνου (μακροπρόθεσμα), πόσους πελάτες κατά μέσο όρο αναμένετε να βρείτε στην ουρά;

Θέμα 3 - 40 μονάδες.

Η Κατερίνα παίρνει ένα τεστ. Ξεκινάει την εξέταση έχοντας 30 μονάδες (τις οποίες έχει μαζέψει από προηγούμενο στάδιο). Κάθε φορά που απαντά σωστά σε μία ερώτηση (γεγονός που συμβαίνει με πιθανότητα 0.45), κερδίζει 10 μονάδες. Όταν απαντά λάθος (με πιθανότητα 0.55) χάνει 10 μονάδες. Η εξέταση συνεχίζεται μέχρις ότου η Κατερίνα συγκεντρώσει 50 μονάδες ή όταν θα έχει χάσει όλες τις μονάδες της.

(α) Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη της εξέτασης της Κατερίνας. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Ποιες από τις καταστάσεις είναι έμμονες και ποιες είναι μεταβατικές;

(β) Με τι πιθανότητα η Κατερίνα θα ολοκληρώσει την εξέταση έχοντας συγκεντρώσει 50 μονάδες; Με τι πιθανότητα θα τελειώσει με 0 μονάδες;

(γ) Πόσο θα διαρκέσει η εξέταση της Κατερίνας; Με άλλα λόγια, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ερωτήσεων που θα απαντήσει μέχρις ότου συγκεντρώσει 50 μονάδες ή χάσει όλες τις μονάδες της;