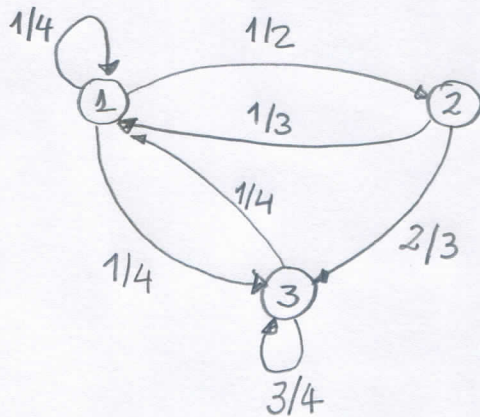


7-6-2023 - ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

(α) Το σχήμα της αλυσίδας είναι:



$$(β) P(X_1=1, X_2=1, X_3=3, X_4=1 \mid X_0=2) =$$

$$= P_{21} \cdot P_{11} \cdot P_{13} \cdot P_{31} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{192} = \underline{\underline{0.0052.}}$$

(γ) Οι εξισώσεις ισορροπίας διακρίνονται ως εξής:

$$\underline{\pi} = \underline{\pi} \cdot \underline{P} \Rightarrow [\pi_1, \pi_2, \pi_3] = [\pi_1, \pi_2, \pi_3] \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 \\ \pi_2 &= \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_3 &= \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \pi_2 &= \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_3 &= \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

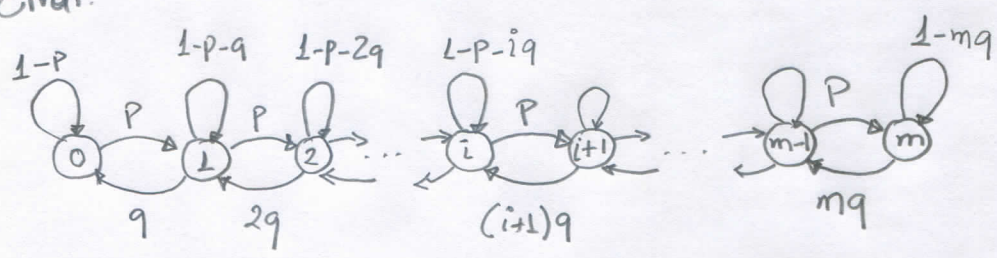
Επίσης:

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \pi_2 &= \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_3 &= \frac{7}{3}\pi_1 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \pi_2 &= \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_3 &= \frac{7}{3}\pi_1 \\ \pi_1 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{7}{3}\pi_1 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \pi_1 &= 0.2609 \\ \pi_2 &= 0.1304 \\ \pi_3 &= 0.6087 \end{aligned}}$$

□

ΘΕΜΑ 2

(α) Ορίζουμε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα με καταστάσεις $0, 1, 2, \dots, m-1, m$ των αριθμό των λεγμάτων στην ουρά. Υποθέτουμε ότι $mq < 1$. Τότε ο γράφος της αλυσίδας είναι:



Πρόκειται για μια εδ. γεννήσεως-θανάτου.

(β) Οι τοπικές εξ. ισορροπίας είναι:

$$\pi_i p = \pi_{i+1} (i+1)q ; i=0, 1, \dots, m-1.$$

Ορίζουμε $\rho \triangleq p/q$ και έχουμε:

$$\pi_{i+1} = \frac{\rho}{i+1} \cdot \pi_i ; i=0, 1, \dots, m-1$$

Για $i=0, \pi_1 = \rho \pi_0$
 $i=1, \pi_2 = \frac{\rho}{2} \pi_1 = \frac{\rho^2}{2} \pi_0$
 $i=2, \pi_3 = \frac{\rho}{3} \pi_2 = \frac{\rho^3}{3!} \pi_0$

$$\therefore \pi_i = \frac{\rho^i}{i!} \pi_0 ; i=0, 1, \dots, m-1$$

Χρησιμοποιούμε την εξ. κανονικοποίησης:

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_m = \sum_{i=0}^m \pi_i$$

$$\therefore 1 = \pi_0 \sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!} \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^m \rho^i / i!}$$

Συνεπώς,

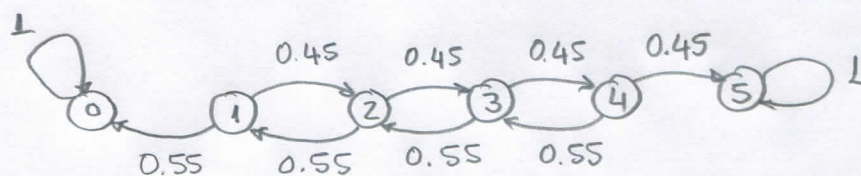
$$\pi_i = \frac{\rho^i / i!}{\sum_{k=0}^m \rho^k / k!}$$

(γ) Ο μέσος όρος των περπατών βτην ουρά είναι:

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^m i \pi_i = \frac{\sum_{i=0}^m i \frac{\rho^i}{i!}}{\sum_{k=0}^m \rho^k / k!} = \rho \cdot \frac{\sum_{i=0}^{m-1} \rho^i / i!}{\sum_{k=0}^m \rho^k / k!}$$

ΘΕΜΑ 3

(α) Ως κατάσταση της διαδικασίας της εξέτασης ορίζουμε τις μονάδες που έχει η Κατερίνα δια 10: 0, 1, 2, 3, 4, 5 → 0, 10, ..., 50 μονάδες
Το γράφημα της αλυσίδας είναι:



Οι καταστάσεις 0 και 5 είναι έληκες και οι 1, 2, 3, 4 μεταβατικές.

(β) Ζητούμε τις πιθανότητες απορροφίσεως από τις καταστάσεις $s=5$ και $s=0$, όταν η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση $i=3$.

Έστω $s=5$ (Η Κατερίνα ωχκεντρίνω 50 μονάδες). Τότε

$$a_0 = 0$$

$$a_5 = 1$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= P_{10} a_0 + P_{12} a_2 = 0.45 a_2 \\ a_2 &= P_{21} a_1 + P_{23} a_3 = 0.55 a_1 + 0.45 a_3 \\ a_3 &= P_{32} a_2 + P_{34} a_4 = 0.55 a_2 + 0.45 a_4 \\ a_4 &= P_{43} a_3 + P_{45} a_5 = 0.55 a_3 + 0.45 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a_2 &= 0.55 (0.45 a_2) + 0.45 a_3 \\ &\Rightarrow a_2 = 0.598 a_3 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow a_3 = 0.55 (0.598 a_3) + 0.45 (0.55 a_3 + 0.45) \Rightarrow \boxed{a_3 = 0.478}$$

Επομένως, η Κατερίνα ωχκεντρίνω 50 μονάδες με η.θ. 0.478 ενώ χάνει όλες τις μονάδες του με 0.522.

(γ) Ζητάμε το μέσο χρόνο απορροφής της αλυσίδας ξεκινώντας από την κατάσταση $i=3$.

$$\mu_0 = \mu_5 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 1 + 0.55 \cancel{\mu_0}^0 + 0.45 \mu_2 \\ \mu_2 &= 1 + 0.55 \mu_1 + 0.45 \mu_3 \\ \mu_3 &= 1 + 0.55 \mu_2 + 0.45 \mu_4 \\ \mu_4 &= 1 + 0.55 \mu_3 + 0.45 \cancel{\mu_5}^0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \mu_2 &= 1 + 0.55(1 + 0.45 \mu_2) + 0.45 \mu_3 \\ &\Rightarrow \mu_2 = 2.0598 + 0.598 \mu_3 \\ \mu_3 &= 1 + 0.55 \mu_2 + 0.45(1 + 0.55 \mu_3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_3 = 1 + 0.55(2.0598 + 0.598 \mu_3) + 0.45 + 0.45 \cdot 0.55 \mu_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_3 = 6.0975}$$