

**ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2021**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

**Φροντιστήριο 1: Ροπογεννήτριες**

**Άσκηση 1**

Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με  $X$  και  $Y$  έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x), & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

1. Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ.  $X$  και  $Y$ .
2. Να εξετάσετε αν οι  $X$  και  $Y$  είναι ανεξάρτητες τ.μ.
3. Να βρεθούν:
  - (α) Η μέση τιμή των τ.μ.  $X$  και  $Y$ ,  $E[X]$  και  $E[Y]$ , αντίστοιχα.
  - (β) Η διασπορά των τ.μ.  $X$  και  $Y$ ,  $var[X]$  και  $var[Y]$ , αντίστοιχα.

**Λύση**

1. Η περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ.  $X$ :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^1 12xy(1-x)dy = 12x(1-x) \int_0^1 ydy \\ &= 12x(1-x) \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{12x(1-x)}{2} \\ \Rightarrow f_X(x) &= 6x(1-x) . \end{aligned}$$

- Η περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ.  $Y$ :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^1 12xy(1-x)dx = 12y \int_0^1 x(1-x)dx \\ &= 12y \int_0^1 x - x^2dx = 12y \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 12y \frac{1}{6} \\ \Rightarrow f_Y(y) &= 2y . \end{aligned}$$

2. Για να είναι οι τ.μ.  $X, Y$  ανεξάρτητες θα πρέπει

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \forall x, y \in (0,1).$$

Έχουμε ότι

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = 6x(1-x) \cdot 2y = 12xy(1-x) = f_{X,Y}(x,y) \quad \forall x, y \in (0,1).$$

Επομένως, οι  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες.

3. (α) Η μέση τιμή της  $X$  είναι:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x f_X(x)dx = \int_0^1 x 6x(1-x)dx = 6 \int_0^1 x^2(1-x)dx \\ &= 6 \int_0^1 x^2 - x^3dx = 6 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 6 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ \Rightarrow E[X] &= \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Για τη μέση τιμή της τ.μ.  $Y$  έχουμε

$$E[Y] = \int_0^1 y f_Y(y)dy = \int_0^1 2y^2dy = \frac{2}{3} [y^3]_0^1 = \frac{2}{3} .$$

(β) Η διασπορά της  $Y$  δίδεται ως

$$\text{var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E^2[X]$$

Υπολογίζουμε τη ροπή δεύτερης τάξης  $E[X^2]$  ως εξής:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^1 x^2 \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 6x(1-x) dx = 6 \int_0^1 x^3(1-x) dx \\ &= 6 \int_0^1 x^3 - x^4 dx = 6 \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 6 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \\ \Rightarrow E[X^2] &= \frac{3}{10} . \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20} .$$

Αντίστοιχα, για τη διασπορά της  $Y$  έχουμε,

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \int_0^1 y^2 \cdot f_Y(y) dy = \int_0^1 y^2 \cdot 2y dy = \int_0^1 2y^3 dy \\ &= 2 \left[ \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{4} \\ \Rightarrow E[Y^2] &= \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\text{var}(Y) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} .$$

**Άσκηση 2**

Μας δίδεται η διακριτή τ.μ.  $X$  για την οποία ισχύει ότι:

$$M_X(s) = a + b \cdot e^{2s} + c \cdot e^{4s}, \quad E[X] = 3, \quad \text{var}(X) = 2.$$

Υπολογίστε τις σταθερές  $a, b, c$  καθώς και τη σ.π.π. της τ.μ.  $X$ .

**Λύση**

Έχουμε τρεις άγνωστες σταθερές και τρεις εξισώσεις, τις οποίες αξιοποιούμε ως εξής:

- Η ροπογεννήτρια για  $s = 0$  ισούται με  $E[e^{0 \cdot X}] = E[1] = 1$ , άρα:

$$\begin{aligned} M_X(s) \Big|_{s=0} &= 1 \\ \Rightarrow a + b \cdot e^{2 \cdot 0} + c \cdot e^{4 \cdot 0} &= 1 \\ \Rightarrow a + b + c &= 1. \end{aligned}$$

- Γνωρίζουμε ότι η  $E[X]$  (η πρώτη ροπή της  $X$ ), ισούται με την πρώτη παράγωγο της ροπογεννήτριας στο σημείο  $s = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} M_X(s) \Big|_{s=0} &= E[X] \\ \Rightarrow \frac{d}{ds} (a + b \cdot e^{2s} + c \cdot e^{4s}) \Big|_{s=0} &= 3 \\ \Rightarrow 2b \cdot e^{2s} + 4c \cdot e^{4s} \Big|_{s=0} &= 3 \\ \Rightarrow 2b + 4c &= 3. \end{aligned}$$

- Γνωρίζουμε ότι η δεύτερη ροπή  $E[X^2]$  ισούται με την δεύτερη παράγωγο της ροπογεννήτριας στο σημείο  $s = 0$ :

$$E[X^2] = \text{var}(X) + E^2[X] = 2 + 9 = 11 \quad (1)$$

$$E[X^2] = \frac{d^2}{ds^2} M_X(s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} (2b \cdot e^{2s} + 4c \cdot e^{4s}) \Big|_{s=0} = (4b \cdot e^{2s} + 16c \cdot e^{4s}) \Big|_{s=0} = 4b + 16c \quad (2)$$

Από τις (1) και (2), προκύπτει ότι:

$$4b + 16c = 11$$

Λύνοντας λοιπόν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων,

$$\begin{aligned} 2b + 4c &= 3 \\ a + b + c &= 1 \\ 4b + 16c &= 11 \end{aligned}$$

προκύπτει ότι  $a = \frac{1}{8}$ ,  $b = \frac{2}{8}$ ,  $c = \frac{5}{8}$ , και επομένως,

$$M_X(s) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} \cdot e^{2s} + \frac{5}{8} \cdot e^{4s}.$$

Για να βρούμε την σ.π.π. της  $X$  χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των ροπογεννητριών που λέει ότι είναι μοναδικά αντιστρέψιμες. Έτσι, συγκρίνοντας την  $M_X(s)$  με τον γενικό τύπο της ροπογεννητριας διακριτής τ.μ., έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M_X(s) &= \sum_{\mathcal{X}} e^{sx} \cdot p_X(x) \\ \frac{1}{8} + \frac{2}{8} \cdot e^{2s} + \frac{5}{8} \cdot e^{4s} &= \sum_{\mathcal{X}} e^{sx} \cdot p_X(x). \end{aligned}$$

Από την μοναδικότητα των ροπογεννητριών, συμπαιρνουμε ότι

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 0 \\ \frac{2}{8}, & x = 2 \\ \frac{5}{8}, & x = 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

**Άσκηση 3**

Η τ.μ.  $Z$  έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_Z(s) = \frac{a - 3s}{s^2 - 6s + 8}$$

1. Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς  $a$ .
2. Βρείτε τη σ.π.π. της τ.μ.  $Z$ .
3. Υπολογίστε τη μέση τιμή  $E[Z]$ .
4. Υπολογίστε τη διασπορά  $var(Z)$ .

**Λύση**

1. Γνωρίζουμε ότι  $M_Z(s) \Big|_{s=0} = 1$ . Άρα,

$$\begin{aligned} M_Z(s) \Big|_{s=0} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{a}{8} &= 1 \\ \Rightarrow a &= 8. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$M_Z(s) = \frac{8 - 3s}{s^2 - 6s + 8}$$

2. Για να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της μοναδικότητας των ροπογεννητριών, θα πρέπει να μετατρέψουμε το παραπάνω κλάσμα σε ένα άθροισμα της γενικής μορφής  $\sum_{\mathcal{X}} e^{sx} \cdot p_X(x)$ , είτε σε ένα άθροισμα ή πολλαπλασιασμό κάποιων επί μέρους ροπογεννητριών γνωστών κατανομών.

*Θυμηθείτε:* Ο μετασχηματισμός ενός μείγματος κατανομών  $f_Y(y) = p_1 f_{X_1}(y) + \dots + p_n f_{X_n}(y)$  ισούται με  $M_Y(s) = p_1 M_{X_1}(s) + \dots + p_n M_{X_n}(s)$ , ενώ ο μετασχηματισμός της κατανομής που προέρχεται από το άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ.  $Z = X_1 + \dots + X_n$  ισούται με  $M_Z(s) = M_{X_1} \times \dots \times M_{X_n}$ .

Εδώ, αρχικά αναλύουμε σε απλά κλάσματα:

$$\begin{aligned} M_Z(s) &= \frac{8 - 3s}{s^2 - 6s + 8} = \frac{8 - 3s}{(s - 4)(s - 2)} \triangleq \frac{A}{s - 4} + \frac{B}{s - 2} \\ A &= (s - 4) \cdot M_Z(s) \Big|_{s=4} = \frac{8 - 3s}{s - 2} \Big|_{s=4} = \frac{8 - 12}{2} = -2 \\ B &= (s - 2) \cdot M_Z(s) \Big|_{s=2} = \frac{8 - 3s}{s - 4} \Big|_{s=2} = \frac{8 - 6}{-2} = -1 \end{aligned}$$

Άρα

$$M_Z(s) = \frac{-2}{s - 4} + \frac{-1}{s - 2}$$

Παρατηρούμε ότι μοιάζει με άθροισμα ροπογεννητριών εκθετικής τ.μ., όπου ισχύει γενικά ότι  $M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$ , όπου  $\lambda$  η παράμετρος της εκθετικής κατανομής. Μπορούμε να φέρουμε την  $M_Z(s)$  σε ένα μείγμα ροπογεννητριών εκθετικών κατανομών ως εξής:

$$M_Z(s) = \frac{-2}{s - 4} + \frac{-1}{s - 2} = \frac{2}{4 - s} + \frac{1}{2 - s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4 - s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2 - s}$$

Επομένως, η  $M_Z(s)$  είναι ένα μείγμα δύο ροπογεννητριών εκθετικών κατανομών, με παραμέτρους 4 και 2, αντίστοιχα. Επομένως, έχουμε

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}4 \cdot e^{-4z} + \frac{1}{2}2 \cdot e^{-2z}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

### 3. Α' Τρόπος

$$E[Z] = \frac{d}{ds} M_Z(s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left( \frac{2}{4-s} + \frac{1}{2-s} \right) \Big|_{s=0} = \frac{2}{(4-s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} \Big|_{s=0} = \frac{2}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

### Β' Τρόπος

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^{+\infty} z \cdot f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} z \cdot \frac{1}{2} (4 \cdot e^{-4z} + 2 \cdot e^{-2z}) dz \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{+\infty} z \cdot 4e^{-4z} dz + \int_0^{+\infty} z \cdot 2e^{-2z} dz \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει είτε υπολογίζοντας αναλυτικά τα ολοκληρώματα, είτε παρατηρώντας ότι αυτά είναι οι μέσες τιμές των εκθετικών κατανομών με παραμέτρους 4 και 2, αντίστοιχα.

### 4. Α' Τρόπος

$$E[Z^2] = \frac{d^2}{ds^2} M_Z(s) \Big|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{2}{4-s} + \frac{1}{2-s} \right) \Big|_{s=0} = \frac{2}{(4-s)^3} + \frac{1}{(2-s)^3} \Big|_{s=0} = \frac{5}{16}$$

Άρα

$$\text{var}(Z) = E[Z^2] - E^2[Z] = \frac{5}{16} - \left( \frac{3}{8} \right)^2 = \frac{11}{64}.$$

### Β' Τρόπος

$$\begin{aligned} E[Z^2] &= \int_0^{+\infty} z^2 \cdot f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} z^2 \cdot \frac{1}{2} (4 \cdot e^{-4z} + 2 \cdot e^{-2z}) dz \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{+\infty} 4z^2 \cdot e^{-4z} dz + \int_0^{+\infty} 2z \cdot e^{-2z} dz \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{4^2} + \frac{2}{2^2} \right) = \frac{5}{16}, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει είτε υπολογίζοντας αναλυτικά τα ολοκληρώματα, είτε παρατηρώντας ότι αυτά είναι οι ροπές δεύτερης τάξης των εκθετικών κατανομών με παραμέτρους 4 και 2, αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, η δεύτερη ροπή της εκθετικής κατανομής με παράμετρο  $\lambda$ , είναι  $E[X^2] = \text{var}(X) + E^2[X] = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$

**Άσκηση 4**

Έστω οι ανεξάρτητες τ.μ.  $Y$  και  $Z$ . Η τ.μ.  $Y$  είναι εκθετική με παράμετρο  $\lambda = 2$ . Η τ.μ.  $Z$  είναι Poisson με παράμετρο  $\lambda = 3$ .

1. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ.  $2Z + 3$ .
2. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ.  $Y + Z$ .

**Λύση**

Για την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda$  ισχύει ότι  $M(s) = e^{\lambda(e^s-1)}$ .

Για την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda$  ισχύει ότι  $M(s) = \frac{\lambda}{\lambda-s}$ .

1. Για τον γραμμικό συνδυασμό μιας τ.μ.,  $Y = aX + b$ , ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(aX+b)}] = e^{sb} E[e^{saX}] = e^{sb} M_X(sa) .$$

Επομένως,

$$M_{2Z+3} = e^{3s} M_Z(2s) = e^{3s} \cdot e^{3(e^{2s}-1)} .$$

2. Για το άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ.  $Y = X_1 + \dots + X_n$ , ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(X_1+\dots+X_n)}] = E[e^{s(X_1)}] \times \dots \times E[e^{s(X_n)}] = M_{X_1}(s) \times \dots \times M_{X_n}(s) .$$

Επομένως,

$$M_{Y+Z} = M_Y(s) \cdot M_Z(s) = \frac{2}{2-s} \cdot e^{3(e^s-1)} .$$

**Άσκηση 5**

Το πλήθος των φοιτητών που θα εξεταστούν στην πρόοδο του HY-317 (Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες) μοντελοποιείται ως μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο  $\lambda$ . Ο χρόνος (σε λεπτά) που αφιερώνει ο κάθε φοιτητής για τη λύση του διαγωνίσματός του ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 60 και διασπορά 25. Έστω  $Y$  ο συνολικός χρόνος που αφιερώθηκε από όλους τους φοιτητές για τη λύση των διαγωνισμάτων της προόδου του HY-317.

- (i) Να βρείτε το μετασχηματισμό της τ.μ.  $Y$ ,  $M_Y(s)$ .
- (ii) Να υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ.  $Y$ .
- (iii) Να υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ.  $Y$ .

**Λύση**

- (i) Έστω  $N$  ο αριθμός των φοιτητών που θα εξεταστούν στην πρόοδο του HY-317. Εφόσον η  $N$  είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο  $\lambda$ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός που της αντιστοιχεί δίνεται από την εξής σχέση:

$$M_N(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}$$

Έστω  $X_i$  ο χρόνος που αφιερώνει ο φοιτητής  $i$  για να λύσει το διαγώνισμά του. Έστω  $M_X(s)$  ο κοινός μετασχηματισμός που αντιστοιχεί στις τ.μ.  $X_i$ . Εφόσον κάθε  $X_i$  είναι κανονικά κατανεμημένη μέση τιμή 60 και διασπορά 25, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός που της αντιστοιχεί δίνεται από την εξής σχέση:

$$M_X(s) = e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2} + \mu s}$$

Ο μετασχηματισμός  $M_Y(s)$  προσδιορίζεται αντικαθιστώντας στην έκφραση του  $M_N(s)$  όπου  $e^s$  με  $M_X(s)$ . Έτσι, έχουμε τελικά:

$$M_Y(s) = M_N(s) \Big|_{e^s = M_X(s)} = e^{\lambda(e^s - 1)} \Big|_{e^s = M_X(s)} = e^{\lambda(M_X(s) - 1)} = e^{\lambda(e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2} + \mu s} - 1)}$$

- (ii) Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη μέση τιμή της τ.μ.  $Y$ , ισχύει η σχέση (Wald's equation):

$$E[Y] = E[X]E[N]$$

Εφόσον η  $N$  είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο  $\lambda$ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:  $E[N] = \lambda$ .

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$E[Y] = \mu \cdot \lambda = 60\lambda$$

- (iii) Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη μέση τιμή της τ.μ.  $Y$ , ισχύει η σχέση (Wald's equation):

$$VAR[Y] = VAR[X]E[N] + (E[X])^2 VAR[N]$$

Εφόσον η  $N$  είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο  $\lambda$ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:  $VAR[N] = \lambda$ .

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$VAR[Y] = 25\lambda + (60)^2\lambda = \lambda(3600 + 25) = 3625\lambda$$