

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2023  
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 3: Στοχαστικές Διαδικασίες Bernoulli, Στοχαστικές Διαδικασίες Poisson

**Άσκηση 1.**

Μια συννεφιασμένη μέρα ρισκάρετε και παίρνετε το ποδήλατο για να φτάσετε στο Πανεπιστήμιο. Ένα λεπτό πριν φτάσετε, διαπιστώνετε ότι ξεκινά ένα ψιλόβροχο. Υπολογίζετε ότι κάθε δευτερόλεπτο που περνά, σας χτυπάει μια σταγόνα ανεξάρτητα με πιθανότητα 0.5.

- α') Ποια η ΣΜΠ, η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου μέχρι να σας χτυπήσει μια σταγόνα για πρώτη φορά;
- β') Κατά μέσο όρο, πόσες σταγόνες θα σας χτυπήσουν ώσπου να φτάσετε στο Πανεπιστήμιο;
- γ') Ποια η πιθανότητα να μην σας χτυπήσει καμία σταγόνα τα επόμενα 60 δευτερόλεπτα;
- δ') Εφόσον συνέβη το παραπάνω ενδεχόμενο, ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά το χρόνου μέχρι να σας χτυπήσει η επόμενη σταγόνα;

Λύση:

- α') Δεδομένου ότι κάθε πτώση είναι ανεξάρτητη από τις άλλες, το χρονικό διάστημα  $T$  μεταξύ των επόμενων πτώσεων θα ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο 0,5,

$$p_T(t) = 0.5^{t-1} \cdot 0.5^1 = 0.5^t, \quad t \geq 1,$$

με μέση τιμή  $E[T] = 1/0.5 = 2$  και διασπορά  $var(T) = (1 - p)/p^2 = 2$ .

- β') Ο αριθμός των σταγόνων σε 60 δευτερόλεπτα δίνεται από την Διωνυμική ΣΜΠ και η μέση τιμή είναι  $60 \cdot 0.5 = 30$ .

- γ') Από την Διωνυμική ΣΜΠ,

$$p_S(0) = \binom{60}{0} 0.5^0 \cdot 0.5^{60} = 0.5^{60}.$$

- δ') Δεδομένου ότι η γεωμετρική κατανομή είναι χωρίς μνήμη, ο χρόνος μέχρι να χτυπήσει η επόμενη σταγόνα έχει μέση τιμή και διασπορά όπως η πρώτη σταγόνα, που δίνεται στο ερώτημα (α).

**Άσκηση 2.**

Ο Γιώργος φτάνει στη στάση του λεωφορείου, όμως συνειδητοποιεί ότι έχει ξεχάσει το πορτοφόλι του. Επειδή επείγει να φτάσει στον προορισμό του, αποφασίζει ότι είναι προτιμότερο να δοκιμάσει το ωτοστοπ. Τα διερχόμενα αυτοκίνητα σταματούν σε ωτοστόπ σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό  $\lambda = 0.1$  ανά λεπτό. Υποθέστε αρχικά ότι οποιοδήποτε αυτοκίνητο σταματήσει, θα μπορέσει να τον εξυπηρετήσει.

α') Βρείτε την πιθανότητα ότι ο Γιώργος θα περιμένει για περισσότερο από 20 λεπτά.

β') Βρείτε την πιθανότητα ότι θα περιμένει μεταξύ 10 και 30 λεπτών.

γ') Βρείτε την πιθανότητα ότι περιμένει το πολύ μέχρι 20 λεπτά.

Λύση:

α') Αυτή είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει άφιξη στη διαδικασία  $Poisson(\lambda)$  για 20 λεπτά, που δίνεται από

$$P_N(0, 20) = e^{-0.1 \cdot 20} = e^{-2}.$$

β') Αυτή είναι η πιθανότητα να μην υπάρξει άφιξη για 10 λεπτά, και να υπάρξει τουλάχιστον μία άφιξη στα επόμενα 20 λεπτά. Λόγω της ιδιότητας της απώλειας μνήμης, αυτά τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα, και έτσι η πιθανότητα δίνεται από

$$P_N(0, 10) \cdot (1 - P_N(0, 20)) = e^{-0.1 \cdot 10} \cdot (1 - e^{-0.1 \cdot 20}) = e^{-1} \cdot (1 - e^{-2}) = e^{-1} - e^{-3}$$

γ') Αυτή είναι η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον μία άφιξη σε 20 λεπτά,

$$1 - P_N(0, 20) = 1 - e^{-2}$$

**Άσκηση 3.**

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών σε ένα βιβλίο ανά σελίδα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Ένα βιβλίο με 200 σελίδες έχει 40 τυπογραφικά λάθη.

- α') Αν επιλέξουμε 10 σελίδες από το παραπάνω βιβλίο, να βρεθεί η πιθανότητα να μην έχουν τυπογραφικά λάθη.
- β') Χωρίζουμε το βιβλίο σε 20 'πακέτα' των 10 σελίδων. Ποιος θα είναι ο αναμενόμενος αριθμός 10σέλιδων από το παραπάνω βιβλίο, που δεν θα έχουν κανένα τυπογραφικό λάθος;
- γ') Ποιά είναι η πιθανότητα από 10 τυχαίες σελίδες του βιβλίου να υπάρχουν ακριβώς 3 χωρίς λάθος;

Λύση:

- α') Ο ρυθμός των λαθών είναι

$$\lambda = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}.$$

Έστω η τυχαία μεταβλητή  $X$  η οποία μετράει τα τυπογραφικά λάθη ανά 10 σελίδες. Γνωρίζουμε ότι η τ.μ  $X \sim Poisson(\lambda \cdot 10)$ . Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι  $P_X(0) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = 0.135$ .

- β') Βλέπουμε τα 10σέλιδα σαν μια διαδικασία αφίξεων *Bernoulli* με παράμετρο  $p = 0.135$ . Δηλαδή έχουμε 'αφίξη' αν δεν υπάρχει τυπογραφικό λάθος. Το διάστημα αφίξεων είναι 20, και επομένως ο μέσος αριθμός αφίξεων είναι  $20 \cdot p = 2.7$ .

- γ') Έστω  $Y$  τα λάθη σε μια σελίδα. Η πιθανότητα να υπάρχουν 0 λάθη σε μία σελίδα είναι:

$$P_Y(0) = \frac{0.2^0 \cdot e^{-0.2}}{0!} = e^{-0.2}$$

Αν τώρα έχουμε δέκα σελίδες, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε μια διαδικασία *Bernoulli* με  $p = e^{-0.2}$  και μήκος 10. Η πιθανότητα να έχουμε 3 'αφίξεις',

$$\binom{10}{3} (e^{-0.2})^3 (1 - e^{-0.2})^7$$

**Άσκηση 4.**

Ένας υπολογιστής εξυπηρετεί προγράμματα που καταθέτουν δύο χρήστες. Ο χρόνος χωρίζεται σε χρονικές σχισμές (time slots). Μία χρονική σχισμή μπορεί να είναι ανενεργή με πιθανότητα  $p_I = 1/6$  και ενεργή με πιθανότητα  $p_B = 5/6$ . Κατά τη διάρκεια μιας ενεργούς σχισμής, υπάρχει πιθανότητα  $p_{1/B} = 2/5$  (αντίστοιχα,  $p_{2/B} = 3/5$ ) ότι εκτελείται ένα πρόγραμμα από το χρήστη 1 (αντίστοιχα, από το χρήστη 2). Υποθέτουμε ότι γεγονότα που συνδέονται με διαφορετικές χρονικές σχισμές είναι ανεξάρτητα.

- α') Βρείτε την πιθανότητα ότι ένα πρόγραμμα από το χρήστη 1 εκτελείται για πρώτη φορά κατά τη διάρκεια της 4ης χρονικής σχισμής.
- β') Δεδομένου ότι ακριβώς 5 από τις 10 πρώτες χρονικές σχισμές ήταν ανενεργές, βρείτε την πιθανότητα ότι η 6η ανενεργή χρονική σχισμή είναι η σχισμή 12.
- γ') Βρείτε το μέσο αριθμό των χρονικών σχισμών μέχρι και συμπεριλαμβανόμενης της σχισμής του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1.
- δ') Βρείτε το μέσο αριθμό των *ενεργών* χρονικών σχισμών μέχρι και συμπεριλαμβανόμενης της σχισμής του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1.
- ε') Βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας, μέση τιμή και διασπορά του αριθμού των προγραμμάτων από το χρήστη 2 μέχρι την υποβολή του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1.

Λύση:

- α') Κατά τη διάρκεια κάθε χρονικής σχισμής, η πιθανότητα εκτέλεσης ενός προγράμματος από το χρήστη 1 είναι  $p_1 = p_{1/B} \cdot p_B = (2/5) \cdot (5/6) = 1/3$ . Η εκτέλεση προγραμμάτων από το χρήστη 1 αποτελεί διαδικασία Bernoulli, με παράμετρο  $p_1$ , συνεπώς:

$$P(\text{1η εκτέλεση προγράμματος από το χρήστη 1 κατά την 4η χρονική σχισμή}) = p_1(1-p_1)^3 = 0.0988.$$

- β') Ουσιαστικά, ζητείται η πιθανότητα η χρονική σχισμή 11 να είναι ενεργή και η 12 να είναι ανενεργή (καθώς οι 5 από τις 10 πρώτες χρονικές σχισμές ήταν ανενεργές). Εφόσον τα γεγονότα που συνδέονται με διαφορετικές χρονικές σχισμές είναι ανεξάρτητα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$p_B \cdot p_I = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0.1389.$$

- γ') Σε κάθε χρονική σχισμή εκτελείται πρόγραμμα από το χρήστη 1 με πιθανότητα  $p_1 = 1/3$ , ανεξαρτήτως του τι συμβαίνει στις υπόλοιπες σχισμές. Η χρονική στιγμή εκτέλεσης του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1 είναι Pascal τυχαία μεταβλητή τάξης 5, με παράμετρο  $p_1 = 1/3$  και άρα, ο ζητούμενος μέσος αριθμός χρονικών σχισμών είναι ίσος με τη μέση τιμή της Pascal τ.μ., δηλ.

$$\frac{5}{p_1} = \frac{5}{1/3} = 15.$$

- δ') Σε κάθε ενεργή χρονική σχισμή εκτελείται πρόγραμμα από το χρήστη 1 με πιθανότητα  $p_{1|B} = 2/5$ , ανεξαρτήτως του τι συμβαίνει στις υπόλοιπες σχισμές. Η ζητούμενη τ.μ. είναι Pascal τ.μ. τάξης 5, με παράμετρο  $p_{1|B} = 2/5$  και άρα, ο ζητούμενος μέσος αριθμός χρονικών σχισμών είναι ίσος με τη μέση τιμή της τ.μ., δηλ.

$$\frac{5}{p_{1|B}} = \frac{5}{2/5} = \frac{25}{2} = 12.5.$$

- ε') Ο αριθμός  $T$  των προγραμμάτων από το χρήστη 2 μέχρι την υποβολή του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1 είναι ίσος με τον αριθμό  $B$  των ενεργών σχισμών μέχρι την εκτέλεση του 5ου προγράμματος από το χρήστη 1, μειωμένο κατά 5. Ο αριθμός των ενεργών σχισμών (“δοκιμές”) μέχρι το 5ο πρόγραμμα του χρήστη 1 (“επιτυχία”) είναι μία Pascal τ.μ. τάξης 5, με παράμετρο  $p_{1|B} = 2/5$  και άρα

$$p_B(t) = \binom{t-1}{4} \left(\frac{2}{5}\right)^5 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{t-5}, \quad t = 5, 6, \dots$$

Εφόσον  $T = B - 5$ , ισχύει ότι  $p_T(t) = p_B(t+5)$  και άρα

$$p_T(t) = \binom{t+4}{4} \left(\frac{2}{5}\right)^5 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^t, \quad t = 0, 1, \dots$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους της μέσης τιμής και της διασποράς της Pascal τ.μ.  $B$ , παίρνουμε τελικά

$$E[T] = E[B] - 5 = \frac{25}{2} - 5 = 7.5$$

και

$$\text{var}(T) = \text{var}(B) = \frac{5(1 - (2/5))}{(2/5)^2}$$