

Φροντιστήριο 4: Επίλυση θεμάτων παλιών προόδων

Άσκηση 1. (*Ροπογεννήτριες και αθροίσματα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ - Πρόοδος 2022*)

Το πλήθος των φορτίων που πακετάρονται σε μία αποστολή ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ . Το βάρος κάθε φορτίου είναι ανεξάρτητο από το βάρος οποιουδήποτε άλλου και είναι ομοιόμορφα κατανομημένο μεταξύ 100 και 200 κιλών. Ορίζουμε την τ.μ. X_i ως το ποσοστό κατά το οποίο το i -στό φορτίο ξεπερνά τα 100 κιλά. Π.χ. αν το 5ο φορτίο έχει βάρος 167 κιλά, τότε $X_5 = 0.67$. Έστω Y το άθροισμα όλων των X_i .

α') Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. Y ;

β') Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y .

γ') Επαληθεύστε την απάντησή σας στο (α) χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y που υπολογίσατε στο (β).

Λύση:

α') Από την εκφώνηση έχουμε τα εξής δεδομένα:

$$\begin{aligned}P_N(n) &= \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\E[N] &= \lambda \\var(N) &= \lambda \\M_N(s) &= e^{\lambda(e^s - 1)} \\f_{X_i}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \\E[X_i] &= \mu_X = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} \\E[X_i^2] &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} = \frac{1}{3} \\var(X_i) &= \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \\M_{X_i}(s) &= \frac{1}{b-a} \frac{e^{sb} - e^{sa}}{s} = \frac{e^s - 1}{s}\end{aligned}$$

Συνεπώς, για την τ.μ. Y έχουμε

$$\begin{aligned}E[Y] &= \mu_X E[N] = \frac{1}{2} \lambda, \\var(Y) &= \sigma_X^2 E[N] + \mu_X^2 var(N) = \frac{1}{12} \lambda + \frac{1}{4} \lambda = \frac{\lambda}{3}.\end{aligned}$$

β')

$$\begin{aligned}
M_Y(s) &= E[(M_X(s))^n] = M_N(s) \Big|_{e^s \leftarrow M_X(s)} \\
&= e^{\lambda(e^s-1)} \Big|_{e^s \leftarrow M_X(s)} \\
&= e^{\lambda(M_X(s)-1)} \\
&= e^{\lambda(\frac{e^s-1}{s}-1)}
\end{aligned}$$

γ') Χρειάζεται να υπολογίσουμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της $M_Y(s)$:

$$\begin{aligned}
E[Y] &= M'_Y(s) \Big|_{s=0} \\
&= e^{\lambda(M_X(s)-1)} \cdot \lambda M'_X(s) \Big|_{s=0}
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $M_X(0) = 1$ και $M'_X = \mu_X$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
E[Y] &= e^{\lambda(1-1)} \cdot \lambda \mu_X \\
&= \frac{\lambda}{2}.
\end{aligned}$$

Για τη διασπορά της Y ,

$$\begin{aligned}
E[Y^2] &= M''_Y(s) \Big|_{s=0} \\
&= e^{\lambda(M_X(s)-1)} \cdot (\lambda M'_X(s))^2 + e^{\lambda(M_X(s)-1)} \cdot \lambda M''_X(s) \Big|_{s=0} \\
&= e^{0\lambda} \lambda^2 \mu_X^2 + e^{0\lambda} \lambda E[X^2] \\
&= \lambda^2 \frac{1}{4} + \lambda \frac{1}{3} \\
&= \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{3}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{3} - \frac{\lambda^2}{4} = \frac{\lambda}{3}.$$

Άσκηση 2. (Ροπογεννήτριες και αθροίσματα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ - Πρόοδος 2021)

Ένας αυτοκινητιστής περνά 4 φανάρια και καθένα από αυτά είναι κόκκινο με πιθανότητα $p = \frac{1}{2}$. Οι χρόνοι αναμονής, X_i , στα φανάρια όπου τον πιάνει το κόκκινο είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 1 λεπτό. Έστω Y ο συνολικός χρόνος αναμονής στα φανάρια.

- α') Ποια η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. Y ;
- β') Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y .
- γ') Επαληθεύστε την απάντησή σας στο (α) χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της τ.μ. Y που υπολογίσατε στο (β).

Λύση:

- α') Εφόσον κάθε φανάρι το βρίσκει κόκκινο με $p = \frac{1}{2}$, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, το πλήθος N των φαναριών που βρίσκει ακολουθεί διωνυμική κατανομή: $N \sim \Delta(n = 4, p = \frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned} P_N(k) &= \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} \\ &= \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Ακόμη,

$$\begin{aligned} E[N] &= np = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \\ \text{var}(N) &= np(1-p) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ M_N(s) &= (1-p+pe^s)^n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^s\right)^4 = \frac{(1+e^s)^4}{2^4}, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} X_i &\sim \exp(\lambda = 1) \\ P_{X_i}(x) &= \lambda e^{-\lambda x} = e^{-x}, \quad x \geq 0 \\ E[X_i] &= \frac{1}{\lambda} = 1 \\ \text{var}(X_i) &= \frac{1}{\lambda^2} = 1 \\ M_{X_i}(s) &= \frac{\lambda}{\lambda - s} = \frac{1}{1-s}. \end{aligned}$$

Ο συνολικός χρόνος αναμονής Y είναι το άθροισμα ενός διωνυμικά κατανομημένου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ. που ακολουθούν εκθετική κατανομή. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[X]E[N] = 1 \cdot 2 = 2 \\ \text{var}(Y) &= \text{var}(X)E[N] + \text{var}(N)(E[X])^2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1^2 = 3. \end{aligned}$$

β')

$$\begin{aligned}
M_Y(s) &= E[(M_X(s))^n] = M_N(s) \big|_{e^s \leftarrow M_X(s)} \\
&= \frac{(1 + M_X(s))^4}{16} \\
&= \frac{(1 + \frac{1}{1-s})^4}{16} \\
&= \left(\frac{2-s}{2(1-s)} \right)^4 \\
&= \frac{1}{16} \left(\frac{2-s}{1-s} \right)^4
\end{aligned}$$

γ')

$$M'_Y(s) = \frac{1}{16} 4(1 + M_X(s))^3 \cdot M'_X(s) = \frac{1}{4} (1 + M_X(s))^3 M'_X(s)$$

Άρα,

$$E[Y] = M'_Y(s) \big|_{s=0} = \frac{1}{4} (1 + M_X(0))^3 M'_X(0) = \frac{1}{4} (1 + 1)^3 \cdot E[X] = \frac{8}{4} \cdot 1 = 2.$$

Ακόμη,

$$M''_Y(s) = \frac{1}{4} 3(1 + M_X(s))^2 (M'_X(s))^2 + \frac{1}{4} (1 + M_X(s))^3 M''_X(s)$$

οπότε,

$$\begin{aligned}
E[Y^2] &= M''_Y(s) \big|_{s=0} = \frac{1}{4} 3(1 + M_X(0))^2 (M'_X(0))^2 + \frac{1}{4} (1 + M_X(0))^3 M''_X(0) \\
&= \frac{1}{4} 3(1 + 1)^2 (E[X])^2 + \frac{1}{4} (1 + 1)^3 E[X^2] \\
&= 3 + 2(\text{var}(X) + (E[X])^2) \\
&= 3 + 2(1 + 1^2) \\
&= 7,
\end{aligned}$$

και

$$\text{var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 7 - 2^2 = 3.$$

Άσκηση 3. (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα - Πρόοδος 2022)

Σωματίδιο κινείται στον άξονα των x ως εξής: Ανά μονάδα χρόνου πραγματοποιεί βήμα μήκους μιας μονάδας ή μένει ακίνητο στη θέση που βρίσκεται. Η πιθανότητα να κινηθεί ένα βήμα δεξιά είναι $p = 0.45$, η πιθανότητα να παραμείνει ακίνητο είναι $q = 0.1$ και η πιθανότητα να κινηθεί ένα βήμα αριστερά είναι $r = 0.45$. Το σωματίδιο ξεκινά από τη θέση O του άξονα των x .

α') Υπολογίστε την πιθανότητα κατά την 20η χρονική μονάδα (δηλαδή μετά από 20 clicks του ρολογιού) το σωματίδιο να βρίσκεται στο διάστημα $[-6, 6]$. Δώστε την απάντησή σας συναρτήσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(\alpha)$.

β') Να υπολογισθεί η πιθανότητα p_n το σωματίδιο να βρεθεί στο διάστημα $[-6, 6]$ μετά από n χρονικές μονάδες. Ποιο το όριο της p_n καθώς το n τείνει στο άπειρο;

Βοήθεια: Εκφράστε τη θέση Y_n του σωματιδίου μετά από n χρονικές μονάδες ως ένα άθροισμα ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών X_i .

Λύση: Έστω X_i ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (**i.i.d.**) τ.μ. που μοντελοποιούν την μετατόπιση του σωματιδίου σε κάθε click του ρολογιού. Μας δίνεται ότι:

$$p_{X_i}(x) = \begin{cases} 0.45 & , x = \pm 1 \\ 0.1 & . x = 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Μετά από n χρονικές μονάδες, η θέση του σωματιδίου δίδεται από την τ.μ. $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Για την X_i έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_{X_i} &= E[X_i] = 1 \cdot 0.45 + (-1) \cdot 0.45 + 0 \cdot 0.1 = 0 \\ E[X_i^2] &= 1^2 \cdot 0.45 + (-1)^2 \cdot 0.45 + 0^2 \cdot 0.1 = 0.9 \\ \sigma_{X_i}^2 &= \text{var}(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = 0.9 \end{aligned}$$

Άρα $E[Y_n] = n\mu_{X_i} = 0$, και $\text{var}(Y_n) = n \cdot 0.9$.

α') Επομένως, για την πιθανότητα την 20η χρονική μονάδα ($n = 20$) το σωματίδιο να βρίσκεται στο $[-6, 6]$ ($P(-6 \leq Y) \text{ ΚΑΙ } P(Y \leq 6)$),

$$\begin{aligned} P(-6 \leq Y_{20} \leq 6) &= P\left(\frac{-6-0}{\sqrt{20 \cdot 0.9}} \leq \frac{Y_{20}-0}{\sqrt{20 \cdot 0.9}} \leq \frac{6-0}{\sqrt{20 \cdot 0.9}}\right) \\ &\stackrel{CLT}{\approx} \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{20 \cdot 0.9}}\right) - \Phi\left(\frac{-6}{\sqrt{20 \cdot 0.9}}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{20 \cdot 0.9}}\right) - 1. \end{aligned}$$

β') Από το ερώτημα (α) γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} P_n &= 2\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{n \cdot 0.9}}\right) - 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n &= 2\Phi(0) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 4. (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα - Πρόοδος 2021)

Σε μία μικρή πόλη με ένα ξενοδοχείο, έρχονται την καλοκαιρινή περίοδο 1000 τουρίστες. Έστω ότι 5 τουρίστες την ημέρα χρειάζονται από ένα δωμάτιο ο καθένας. Να υπολογιστεί ο ελάχιστος αριθμός των ελεύθερων δωματίων που πρέπει να διαθέτει ημερησίως το ξενοδοχείο για να είναι σε θέση να εξυπηρετεί τους τουρίστες που έρχονται στην πόλη με πιθανότητα τουλάχιστον 99%.

Δίνεται η ακόλουθη τιμή για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής: $\Phi(2.33) = 0.99$.

Λύση: Η πιθανότητα κάποιος από τους $n = 1000$ τουρίστες να χρειαστεί δωμάτιο στο ξενοδοχείο είναι ίση με $p = \frac{5}{1000}$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους.

Έστω N το πλήθος των τουριστών που χρειάζονται δωμάτιο στη διάρκεια μίας μέρας. Τότε έχουμε:

- $N \sim \Delta(n = 1000, p = 0.005)$
- $E[N] = np = 1000 \cdot 0.005 = 5$
- $Var(N) = np(1 - p) = 1000 \cdot 0.005 \cdot 0.995 = 4.975$

Έστω m το πλήθος των διαθέσιμων δωματίων στο ξενοδοχείο. Θέλουμε να ισχύει:

$$P(N \leq m) \geq 0.99$$

Από την De Moivre-Laplace προσέγγιση της διωνυμικής, γνωρίζουμε ότι αν η S_n είναι διωνυμική τ.μ. με παραμέτρους n, p και το n είναι μεγάλο και k, l μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, τότε:

$$P(k \leq S_n \leq l) \approx \Phi\left(\frac{l + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Συνεπώς, στο παράδειγμά μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(N \leq m) &\geq 0.99 \Rightarrow \\ P\left(\frac{N - 5}{\sqrt{4.975}} \leq \frac{m - 5}{\sqrt{4.975}}\right) &\geq 0.99 \Rightarrow \\ \Phi\left(\frac{m + \frac{1}{2} - 5}{\sqrt{4.975}}\right) &\geq 0.99 \Rightarrow \\ \Phi\left(\frac{m + \frac{1}{2} - 5}{\sqrt{4.975}}\right) &\geq \Phi(2.33) \Rightarrow \\ \frac{m + \frac{1}{2} - 5}{\sqrt{4.975}} &\geq 2.33 \Rightarrow \\ m &\geq 9.7 \end{aligned}$$

Άσκηση 5. (*Poisson αφίξεις - Πρόοδος 2022*)

Πακέτα πληροφορίας καταφτάνουν σε έναν κόμβο του δικτύου σύμφωνα με μία στοχαστική διαδικασία Poisson με ένταση 1500 πακέτα το δευτερόλεπτο.

- α') Ποια η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι την άφιξη του 10000-στού πακέτου;
- β') Ποιο το μέσο πλήθος των πακέτων που φτάνουν στον κόμβο μεταξύ 06:50 και 07:00;
- γ') Ποια είναι η πιθανότητα ότι ακριβώς 10 πακέτα φτάνουν στον κόμβο στη διάρκεια 0.01 δευτερολέπτων;
- δ') Ποια είναι η πιθανότητα ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ της άφιξης του 1000-στού και του 1001-στού πακέτου είναι μεγαλύτερο από 0.0005 δευτερόλεπτα;
- ε') Ποια είναι η πιθανότητα ότι κανένα πακέτο δεν φτάνει τα πρώτα 0.001 δευτερόλεπτα κάθε μέρας στη διάρκεια μίας εβδομάδας;

Λύση:

- α') Το χρονικό διάστημα έως την άφιξη του 10000-στού πακέτου ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 10000, με παράμετρο $\lambda = 1500$. Άρα

$$E[T_{10000}] = \frac{k}{\lambda} = \frac{10000}{1500} = 6.67 \text{ sec.}$$

- β') Το πλήθος των πακέτων N_{600} που φτάνουν σε διάστημα 10 λεπτών (600 δευτερολέπτων) ακολουθεί Poisson κατανομή με παραμέτρους $\lambda = 1500$, $\tau = 600$. Επομένως,

$$E[N_{600}] = \lambda\tau = 1500 \cdot 600 = 900,000 \text{ πακέτα.}$$

- γ') Το πλήθος $N_{0.01}$ πακέτων, που φτάνουν σε 0.01 δευτερόλεπτα ακολουθεί κατανομή Poisson με παραμέτρους $\lambda = 1500$, $\tau = 0.01$. Άρα

$$P(N_{0.01} = 10) = \frac{(\lambda\tau)^k e^{-\lambda\tau}}{k!} = \frac{(15)^{10} e^{-15}}{10!} = 0.0486.$$

- δ') Το χρονικό διάστημα T , μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1500$, $P_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ και $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Συνεπώς,

$$P(T > 0.0005) = 1 - F_T(0.0005) = e^{-1500 \cdot 0.0005} = 0.4724.$$

- ε') Το πλήθος των πακέτων που φτάνει σε διάρκεια 0.001 δευτερόλεπτα ακολουθεί Poisson με παραμέτρους $\lambda = 1500$, $\tau = 0.001$. Οπότε,

$$P(N_{0.001} = 0) = e^{-1.5} = 0.2231.$$

Άρα, το ενδεχόμενο να συμβεί αυτό κάθε μέρα στη διάρκεια μίας εβδομάδας θα είναι $P = 0.2231^7$.