

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 6

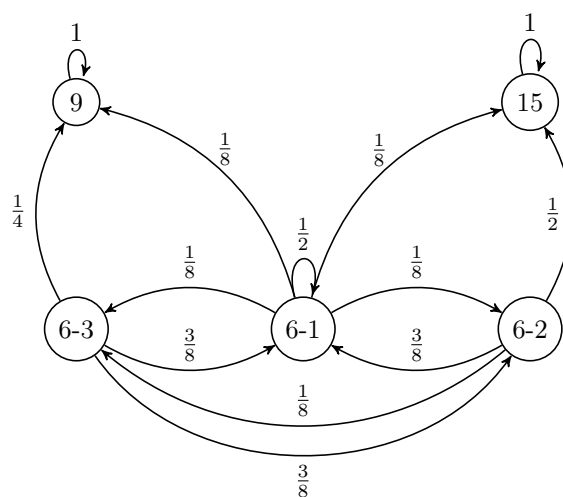
Άσκηση 1

Βρίσκεστε σε ένα κτίριο με αριθμημένα δωμάτια. Έστω ότι το δωμάτιο από το οποίο ξεκινάτε είναι το δωμάτιο 6-1. Όταν βρίσκεστε σε αυτό το δωμάτιο, με πιθανότητα 0.5 θα συνεχίσετε να βρίσκεστε σε αυτό την επόμενη χρονική στιγμή. Αν δε μείνετε σε αυτό το δωμάτιο, μπορείτε να μεταβείτε ισοπίθانا σε κάποιο από τα δωμάτια 6-2, 6-3, 9 ή 15. Όταν βρίσκεστε στο δωμάτιο 6-2, με πιθανότητα 0.5 μπορείτε να μεταβείτε την επόμενη χρονική στιγμή στο δωμάτιο 15, με πιθανότητα $3/8$ στο δωμάτιο 6-1 και με πιθανότητα $1/8$ στο δωμάτιο 6-3. Όταν βρίσκεστε στο δωμάτιο 6-3, με πιθανότητα 0.25 μπορείτε να μεταβείτε την επόμενη χρονική στιγμή στο δωμάτιο 9, με πιθανότητα $3/8$ στο δωμάτιο 6-1 και με πιθανότητα $3/8$ στο δωμάτιο 6-2. Αν σταματήσετε να βρίσκεστε σε κάποιο από τα δωμάτια 6 (6-1, 6-2, 6-3) δεν μπορείτε να επιστρέψετε σε αυτά. Τέλος, τα δωμάτια 9 και 15 δεν επικοινωνούν μεταξύ τους.

- (α) Δώστε το γράφημα της παραπάνω Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ποιες είναι μεταβατικές καταστάσεις και ποιες απορροφήσεως; Ποια είναι η πιθανότητα να σταματήσετε να βρίσκεστε σε κάποιο από τα δωμάτια 6;
- (β) Ποια η πιθανότητα να βρεθείτε στο δωμάτιο 15;
- (γ) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός μεταβάσεων μέχρι να σταματήσετε να βρίσκεστε σε κάποιο από τα δωμάτια 6;

Λύση

- (α) Το διάγραμμα καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι το εξής:



Σχήμα 1: Μαρκοβιανή Αλυσίδα

Επιθεωρώντας το παραπάνω διάγραμμα, οι καταστάσεις 6-1, 6-2, και 6-3 είναι όλες μεταβατικές, ενώ οι 9 και 15 είναι απορροφητικές, διότι δεν υπάρχει επιστροφή από αυτές. Τέλος, η πιθανότητα να σταματήσουμε να βρισκόμαστε σε κάποιο από τα δωμάτια 6 είναι ίση με 1.

- (β) Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης από την κατάσταση 15. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

$$\begin{aligned} a_{15} &= 1 \\ a_9 &= 0 \\ a_{6-1} &= \frac{1}{2}a_{6-1} + \frac{1}{8}a_{15} + \frac{1}{8}a_{6-2} + \frac{1}{8}a_9 + \frac{1}{8}a_{6-3} \\ a_{6-2} &= \frac{1}{2}a_{15} + \frac{3}{8}a_{6-1} + \frac{1}{8}a_{6-3} \\ a_{6-3} &= \frac{1}{4}a_9 + \frac{3}{8}a_{6-1} + \frac{3}{8}a_{6-2} \end{aligned}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων, και γνωρίζοντας ότι ξεκινήσαμε από το δωμάτιο 6-1, έχουμε:

$$a_{6-1} = \frac{105}{184} \approx 0.571$$

Επίσης, για τα άλλα a_i προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} a_{6-2} &= 0.77717 \\ a_{6-3} &= 0.50543 \end{aligned}$$

- (γ) Ο ζητούμενος μέσος αριθμός μεταβάσεων αντιστοιχεί στον αναμενόμενο χρόνο μέχρι την απορρόφηση για την μεταβατική κατάσταση 6-1. Από τη θεωρία έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu_{15} &= 0 \\ \mu_9 &= 0 \\ \mu_{6-1} &= 1 + \frac{1}{2}\mu_{6-1} + \frac{1}{8}\mu_{15} + \frac{1}{8}\mu_{6-2} + \frac{1}{8}\mu_9 + \frac{1}{8}\mu_{6-3} \\ \mu_{6-2} &= 1 + \frac{1}{2}\mu_{15} + \frac{3}{8}\mu_{6-1} + \frac{1}{8}\mu_{6-3} \\ \mu_{6-3} &= 1 + \frac{1}{4}\mu_9 + \frac{3}{8}\mu_{6-1} + \frac{3}{8}\mu_{6-2} \end{aligned}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων παίρνουμε:

$$\mu_{6-1} = \frac{162}{46} = \frac{81}{23} \approx 3.522$$

Άσκηση 2

Ένα πειραματικό ποντίκι είναι φυλακισμένο μέσα σε ένα κλουβί με τρεις πόρτες. Σε κάθε γύρο, το ποντίκι ανοίγει τυχαία μία πόρτα και τρώει ένα κομμάτι τυρί, εάν υπάρχει τέτοιο πίσω από την πόρτα που άνοιξε. Κάθε πόρτα επιλέγεται με ίση πιθανότητα σε κάθε γύρο, ανεξάρτητα από το που το ποντίκι βρήκε τυρί στον προηγούμενο γύρο. Αν δε βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο, η πιθανότητα ότι το ποντίκι θα βρει τυρί σε αυτόν τον γύρο είναι $\frac{3}{4}$. Αν βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο και η ίδια πόρτα επιλεγεί σε αυτόν τον γύρο, η πιθανότητα ότι το ποντίκι θα βρει τυρί είναι 0. Ενώ αν βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο και διαφορετική πόρτα επιλεγεί σε αυτόν τον γύρο, η πιθανότητα ότι το ποντίκι θα βρει τυρί είναι 1.

- (α) Μας ενδιαφέρει το αν το ποντίκι τρώει το τυρί του σε κάθε γύρο. Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη του πειράματος. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.
- (β) Αν παρατηρήσετε το ποντίκι για 1000 γύρους, σε ποιο ποσοστό αυτών θα το δείτε να τρώει το τυρί του;
- (γ) Έστω ότι δε βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο. Ποιος είναι ο μέσος αριθμός γύρων έως ότου το ποντίκι να φάει ένα κομμάτι τυρί;
- (δ) Έστω ότι δε βρέθηκε τυρί στον προηγούμενο γύρο. Ποιος είναι ο μέσος αριθμός γύρων έως ότου το ποντίκι να φάει n κομμάτια τυρί;

Βοήθεια: Στα ερωτήματα (γ) και (δ) χρησιμοποιείτε τις γνώσεις σας σχετικά με μέσους χρόνους ως την πρώτη επίσκεψη και μέσο χρόνο επανόδου, αντίστοιχα.

- (ε) Κοιτάτε μέσα στο κλουβί και παρατηρείτε ότι το ποντίκι τρώει ένα κομμάτι τυρί πίσω από την πόρτα 1. Ποια είναι η πιθανότητα ότι 3 γύρους μετά, το ποντίκι θα βρεθεί να τρώει πάλι πίσω από την πόρτα 1;

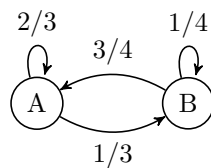
Βοήθεια: Στο ερώτημα (ε), χρειάζεται να ορίσετε μία νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα που να περιγράφει και τις πόρτες πίσω από τις οποίες το ποντίκι βρίσκει τυρί.

Λύση

- (α) Εφόσον μας ενδιαφέρει αν το ποντίκι τρώει το τυρί του, ορίζουμε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με δύο καταστάσεις,

- A: το ποντίκι βρίσκει τυρί.
- B: το ποντίκι δε βρίσκει τυρί.

όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Μαρκοβιανή Αλυσίδα

Ο αντίστοιχος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Εξήγηση επιμέρους πιθανοτήτων:

- $P(\Theta \text{α βρει} \mid \Delta \text{ε βρήκε πριν}) = \frac{3}{4}$ (δίδεται από την εκφώνηση)
 - $P(\Delta \text{ε θα βρει} \mid \Delta \text{ε βρήκε πριν}) = 1 - P(\Theta \text{α βρει} \mid \Delta \text{ε βρήκε πριν}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
 - $P(\Theta \text{α βρει} \mid \text{Βρήκε πριν}) = P(\text{Να επιλέξει διαφορετική πόρτα από αυτήν του προηγούμενου γύρου}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
 - $P(\Delta \text{ε θα βρει} \mid \text{Βρήκε πριν}) = P(\text{Να επιλέξει την ίδια πόρτα με αυτήν του προηγούμενου γύρου}) = \frac{1}{3}$.
- (β) Για να βρούμε σε πόσους από τους 1000 γύρους το ποντίκι τρώει το τυρί, θα πρέπει να υπολογίσουμε τη στατική κατανομή της αλυσίδας.
Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\pi = \pi \cdot \mathbf{P} \Rightarrow [\pi_0 \quad \pi_1] = [\pi_0 \quad \pi_1] \cdot \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{2}{3}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_1 \\ \pi_1 &= \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 \\ \Rightarrow \frac{1}{3}\pi_0 &= \frac{3}{4}\pi_1 \end{aligned}$$

που σε συνδυασμό με την $\pi_0 + \pi_1 = 1$ μας δίνει $\pi_0 = \frac{9}{13} = 0.692$ και $\pi_1 = \frac{4}{13}$.

Άρα σε κάποιο συγκεκριμένο γύρο στο μακρινό μέλλον, το ποντίκι θα τρώει τυρί με πιθανότητα 0.692 και αν παρατηρήσουμε το ποντίκι για 1000 γύρους, θα τρώει το τυρί στους $1000 \times 0.692 = 692$ από αυτούς.

- (γ) Μας ζητείται ο μέσος χρόνος ως την πρώτη επίσκεψη της κατάστασης 0, ξεκινώντας από την κατάσταση 1.
Σχετική θεωρία:
 Ο μέσος αριθμός των βημάτων ή αναμενόμενος χρόνος μέχρι την πρώτη διέλευση του συστήματος από μία συγκεκριμένη έμμονη κατάσταση s , ξεκινώντας από οποιαδήποτε κατάσταση i , είναι οι μοναδικές λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned} t_s &= 0 \\ t_i &= 1 + \sum_{j=1}^m p_{ij} t_j, \quad \text{για κάθε } i \neq s \end{aligned}$$

Άρα, εδώ:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \quad s = 0 \quad (\text{η έμμονη κατάσταση για την οποία ψάχνουμε την 1η διέλευση}) \\ t_1 &= 1 + p_{10} \cdot t_0 + p_{11} \cdot t_1 = 1 + \frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{4}{3} = 1.33 \end{aligned}$$

- (δ) Εδώ, μας ζητείται ο αναμενόμενος χρόνος T , μέχρι την πρώτη διέλευση του συστήματος από την κατάσταση 0, ακολουθούμενος από $(n-1)$ επανόδους στην κατάσταση 0, ξεκινώντας από τη 0, δηλαδή:

$$T = t_1 + (n-1) \cdot t_0^*$$

Σχετική θεωρία:

Ο μέσος χρόνος επανάληψης της κατάστασης s , ορίζεται ως:

$$t_s^* = E[\text{αριθμός μεταβάσεων μέχρι την πρώτη επιστροφή στην } s, \text{ ξεκινώντας από την } s]$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το t_s^* , αν γνωρίζουμε τους χρόνους της 1ης επίσκεψης t_i , χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$t_s^* = 1 + \sum_{j=1}^m p_{sj} t_j$$

Εδώ, γνωρίζουμε από το ερώτημα (γ) ότι $t_0 = 0$ και $t_1 = \frac{4}{3}$.

Έχουμε λοιπόν:

$$t_0^* = 1 + p_{01} \cdot t_1 + p_{00} \cdot t_0 = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0 = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{13}{9}.$$

Συνεπώς,

$$T = \frac{4}{3} + (n-1) \cdot \frac{13}{9}$$

- (ε) Εδώ, μας ενδιαφέρει πίσω από ποια πόρτα βρίσκει το ποντίκι να φάει. Επομένως, ορίζουμε κατάλληλα τις εξής καταστάσεις:

Κατάσταση i : Το ποντίκι βρίσκει τυρί πίσω από την πόρτα $i = 1, 2, 3$.

Κατάσταση 4: Το ποντίκι δε βρίσκει τυρί.

Η αντίστοιχη Μαρκοβιανή αλυσίδα φαίνεται στο Σχήμα ;;

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης:

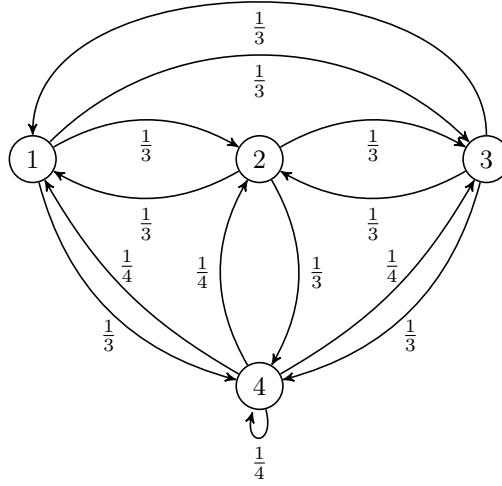
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Εξήγηση μεταβάσεων:

- Από κάθε πόρτα έχει πιθανότητα $\frac{1}{3}$ να επιλέξει την ίδια πόρτα και να μη βρει τυρί. Για κάθε πόρτα διαφορετική της τωρινής, υπάρχει πιθανότητα $\frac{1}{3}$ να επιλεγεί (και σίγουρα πίσω της θα υπάρχει τυρί).
- $P(\text{Δε θα βρει τυρί} \mid \text{Δε βρήκε τυρί πριν}) = \frac{1}{4}$ (από την εκφώνηση).
- $P(\text{Θα βρει τυρί} \mid \text{Δε βρήκε τυρί πριν}) = 1 - P(\text{Δε θα βρει τυρί} \mid \text{Δε βρήκε τυρί πριν}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ($\frac{1}{4}$ για κάθε πόρτα).

Υπάρχουν 7 διαδρομές μήκους 3 που ξεκινούν και καταλήγουν στην κατάσταση 1:

- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{27}$



Σχήμα 3: Μαρκοβιανή Αλυσίδα

- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{36}$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{27}$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{36}$
- $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{36}$
- $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{36}$
- $1 \rightarrow 4 \rightarrow 4 \rightarrow 1$: Πιθανότητα $\frac{1}{48}$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$2 \cdot \frac{1}{27} + 4 \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{48} = 0.206.$$

Άσκηση 3

Στο γκαράζ του Πανεπιστημίου έχει εγκατασταθεί μία μπάρα η οποία λειτουργεί με κάρτες και δυστυχώς κινδυνεύει από το προσωπικό και τους καθηγητές. Συγκεκριμένα, κάθε μέρα ένα αυτοκίνητο προσκρούει στην μπάρα με πιθανότητα p και στην περίπτωση αυτή μία καινούρια μπάρα πρέπει να εγκατασταθεί. Επίσης, μία μπάρα η οποία λειτουργεί για m μέρες αντικαθίσταται από μία νέα για λόγους καλής λειτουργίας.

- Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως τη λειτουργία του συστήματος της μπάρας του γκαράζ. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.
- Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας και υπολογίστε τη στατική κατανομή της αλυσίδας.
- Σε βάθος χρόνου (μακροπρόθεσμα), ποια είναι η συχνότητα με την οποία αντικαθίσταται η μπάρα; Με τι ισούται αυτή η συχνότητα όταν η διάρκεια m της φυσικής ζωής της μπάρας είναι πολύ μεγάλη;

Λύση

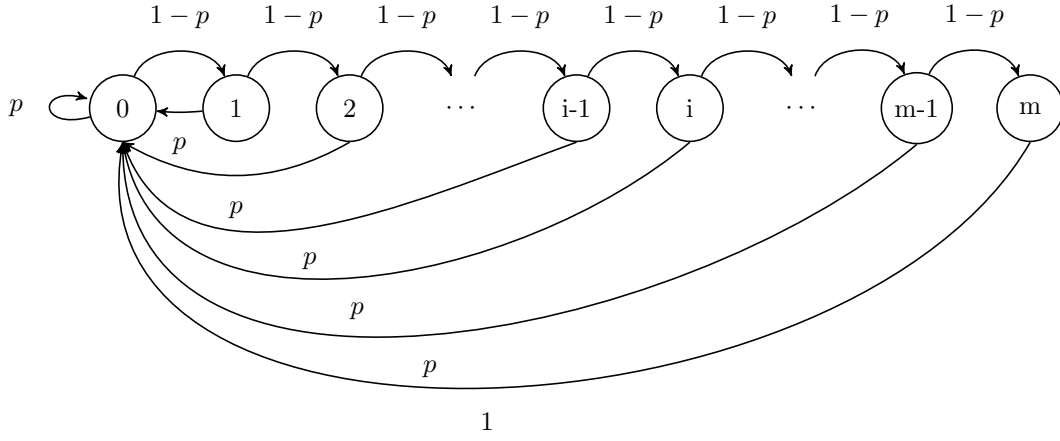
- Ορίζουμε $m + 1$ καταστάσεις $\{0, 1, 2, \dots, m - 1, m\}$ ως εξής:

Κατάσταση i : Η μπάρα βρίσκεται σε λειτουργία για i μέρες. Για $i = 0, 1, \dots, m$.

Το γράφημα της αλυσίδας δίδεται στο Σχήμα 4:

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 & \dots & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 4: Μαρκοβιανή Αλυσίδα

(β) Συμβολίζοντας με $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m]$ το διάνυσμα της στατικής κατανομής των καταστάσεων, οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

- $\pi = \pi \cdot P$,
- $\pi \cdot e = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^m \pi_i = 1$.

Επομένως:

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \pi_0 p + \pi_1 p + \dots + \pi_{m-1} p + \pi_m \\
 \pi_1 &= \pi_0 (1-p) \\
 \pi_2 &= \pi_1 (1-p) = \pi_0 (1-p)^2 \\
 \pi_3 &= \pi_2 (1-p) = \pi_0 (1-p)^3 \\
 &\vdots \\
 \pi_i &= \pi_{i-1} (1-p) = \pi_0 (1-p)^i, \quad i = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned} \tag{1}$$

και

$$\begin{aligned}
 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_m = \pi_0 + \pi_0 (1-p) + \dots + \pi_0 (1-p)^m \\
 &= \pi_0 \sum_{i=0}^m (1-p)^i = \pi_0 \frac{1 - (1-p)^{m+1}}{1 - (1-p)} = \pi_0 \frac{1 - (1-p)^{m+1}}{p}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Άρα

$$\pi_0 = \frac{p}{1 - (1-p)^{m+1}}$$

και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε τελικά:

$$\pi_i = \frac{p(1-p)^i}{1 - (1-p)^{m+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

(γ) Μακροπρόθεσμα, η συχνότητα με την οποία αντικαθίσταται η μπάρα ισούται με τη συχνότητα επισκέψεων της κατάστασης 0 (όπου η μπάρα λειτουργεί για 0 μέρες, δηλαδή μόλις έχει αντικατασταθεί), που είναι

$$\pi_0 = \frac{p}{1 - (1-p)^{m+1}}.$$

Καθώς $m \rightarrow \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \pi_0 = p$.

Με άλλα λόγια, για πολύ μεγάλη διάρκεια φυσικής ζωής της μπάρας ($m \rightarrow \infty$) (δηλαδή για καλή ποιότητα του εξαρτήματος), η συχνότητα αντικατάστασής της ισούται με την πιθανότητα p με την οποία ο χρήστης της προκαλεί ζημιά.