

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
1 Απριλίου 2023 - Διάρκεια: 2 Ωρες

Θέμα 1 - 30 μονάδες: Ροπογεννήτριες και αθροίσματα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.

Η Ειρήνη παίρνει μία εξέταση με 12 ερωτήσεις. Ο χρόνος T_i που αφιερώνει στην i -στή ερώτηση είναι εκθετικά κατενεμημένος με μέση τιμή $E[T_i] = \frac{1}{3}$ ώρες. Οι τ.μ. T_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η Ειρήνη απαντά κάθε ερώτηση σωστά με πιθανότητα $\frac{2}{3}$, ανεξάρτητα από ερώτηση σε ερώτηση. Ορίζουμε τις εξής τ.μ.:

N : Το πλήθος των ερωτήσεων που η Ειρήνη απαντά **σωστά**.

X : Ο συνολικός χρόνος που η Ειρήνη αφιερώνει στις ερωτήσεις που απαντά **σωστά**.

(α) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. N .

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X .

(γ) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. X .

Θέμα 2 - 30 μονάδες: Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Ένας αστροφυσικός προσπαθεί να εκτιμήσει τη λάμψη b ενός αστεριού με ένα σφάλμα το οποίο είναι μικρότερο από 0.1 με πιθανότητα μεγαλύτερη από 95%. Το όργανο μέτρησης που διαθέτει προσθέτει θόρυβο N με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 2, ανεξάρτητα από μέτρηση σε μέτρηση. Συνεπώς, κάθε μέτρηση X_k μπορεί να μοντελοποιηθεί ως το άθροισμα της προς εκτίμηση τιμής της λάμψης b και της συνιστώσας του θορύβου N_k :

$$X_k = b + N_k$$

Ο αστρονόμος πραγματοποιεί n μετρήσεις και χρησιμοποιεί το δειγματικό μέσο όρο ως την εκτίμηση της ποσότητας b :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

(α) Χρησιμοποιείτε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για να υπολογίσετε το ελάχιστο πλήθος των μετρήσεων n που θα επιτρέψουν στον αστροφυσικό να εκτιμήσει τη λάμψη του αστεριού με τα επίπεδα ακρίβειας και εμπιστοσύνης που αναφέρονται στη εκφώνηση. Ισχύει ότι $\Phi(1.96) = 0.975$.

(β) Χρησιμοποιείτε την ανισότητα Chebyshev για τον ίδιο σκοπό. Τι παρατηρείτε;

Θέμα 3 - 40 μονάδες: Poisson αφίξεις.

Οι μεταφορικές εταιρίες S και T στέλνουν φορτία από την Αθήνα στο Ηράκλειο σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_S και λ_T [φορτία ανά ημέρα], αντίστοιχα. Το βάρος κάθε φορτίου σε τόνους, ανεξάρτητα από ποια μεταφορική προέρχεται, είναι τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.5 & x = 600, \\ 0.3 & x = 1000, \\ 0.2 & x = 2000, \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Ποια είναι η πιθανότητα του γεγονότος: 5 φορτία φτάνουν στο Ηράκλειο μεταξύ 09:00-15:00 μέσω της μεταφορικής S ΚΑΙ 7 φορτία φτάνουν στο Ηράκλειο μεταξύ 16:00-24:00 μέσω της μεταφορικής T;

(β) Υπολογίστε το μέσο βάρος του συνολικού φορτίου που φτάνει στο Ηράκλειο στη διάρκεια 6 ωρών.

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου έως ότου το Ηράκλειο παραλάβει ακριβώς 8 φορτία των 1000 τόνων το καθένα από την μεταφορική T.

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι κανένα φορτίο δεν φτάνει την πρώτη ώρα κάθε μέρας στη διάρκεια μίας εβδομάδας;