

1-4-2023

ΘΕΜΑ 1^ο (α) Η τ.μ. N ακολουθεί Διωνομική κατανομή: $\Delta \sim N(n=12, p=\frac{2}{3})$.

Συνεπώς, $P_N(k) = \binom{12}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{12-k}; k=0,1,\dots,12$

$$E[N] = np = 12 \frac{2}{3} = \underline{8}$$

$$\text{Var}(N) = np(1-p) = 12 \frac{2}{3} \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = \underline{2.67}$$

(β) Έστω X_j ο χρόνος που η Ειρήνη αφιερώνει στην j -στή ερώτηση που απαντά σωστά. Από την εκφώνηση:

$$X_i \sim \exp(\lambda=3), \mu_{X_i} = \frac{1}{3}, \text{var}(X_i) = \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

Συνεπώς, $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ όπου $N \sim \Delta(12, \frac{2}{3})$,

δηλαδή η X είναι το άθροισμα ενός τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων εκθετικά κατανομημένων τ.μ. Γνωρίζουμε ότι:

$$E[X] = E[N] \cdot E[X_i] = 8 \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = \underline{2.67}$$

$$\text{Var}(X) = E[N] \text{var}(X_i) + (E[X_i])^2 \cdot \text{var}(N)$$

$$= 8 \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{27} = \underline{1.1852}$$

(γ) Η προγεννήτρια της Διωνομικής: $M_N(s) = (1-p+pe^s)^n = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^s\right)^{12}$
 -||- Εκθετικής: $M_{X_i}(s) = \frac{\lambda}{\lambda-s} = \frac{3}{3-s}$

Επομένως,

$$\mu_X(s) = M_N(s) \Big|_{e^s \equiv M_{X_i}(s)} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^s\right)^{12} \Big|_{e^s \equiv \frac{3}{3-s}}$$

$$\therefore \mu_X(s) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{3}{3-s}\right)^{12} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3-s}\right)^{12} \quad \square$$

$$\mu_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{(b + N_1) + \dots + (b + N_n)}{n}$$

$$\therefore \mu_n = b + \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_n}{n}, \text{ όπου } E[N_i] = 0, \text{ var}(N_i) = 2^2 = 4.$$

$$\text{Επομένως, } \mu_{\mu_n} = E[\mu_n] = b \text{ και } \sigma_{\mu_n}^2 = \text{var}(\mu_n) = \frac{\text{var}(N_i)}{n} = \frac{4}{n}.$$

(α) Θέλουμε να ισχύει:

$$P(|\mu_n - b| < 0.1) \geq 0.95$$

$$P(-0.1 < \mu_n - b < 0.1) \geq 0.95$$

$$P\left(-\frac{0.1}{\sigma_{\mu_n}} < \frac{\mu_n - b}{\sigma_{\mu_n}} < \frac{0.1}{\sigma_{\mu_n}}\right) \geq 0.95$$

$$P\left(-\frac{0.1}{2/\sqrt{n}} < \frac{\mu_n - b}{\sigma_{\mu_n}} < \frac{0.1}{2/\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$$

$$\Phi\left(\frac{0.1\sqrt{n}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{0.1\sqrt{n}}{2}\right) \geq 0.95$$

$$2\Phi\left(\frac{0.1\sqrt{n}}{2}\right) - 1 \geq 0.95$$

$$\Phi\left(\frac{0.1\sqrt{n}}{2}\right) \geq \frac{1.95}{2} = 0.975 = \Phi(1.96)$$

$$\therefore \frac{0.1\sqrt{n}}{2} \geq 1.96 \Rightarrow \boxed{n \geq 1537}$$

(β) Chebyshev: $P(|X - E[X]| \geq c) \leq \frac{\sigma_x^2}{c^2}$
Θέτουμε $X = \mu_n$, $c = 0.1$, $E[\mu_n] = b$, $\sigma_{\mu_n}^2 = \frac{4}{n}$

$$P(|\mu_n - b| \geq 0.1) \leq \frac{\sigma_{\mu_n}^2}{0.1^2} = 1 - 0.95$$

$$\therefore \frac{4}{n(0.1)^2} = 0.05 \Rightarrow \boxed{n = 8000}$$

Η Chebyshev εξασφαλίζει την ικανοποίηση των επιθυμητών επιπέδων ακρίβειας και αξιοπιστίας για ένα ογκομετρικά μεγαλύτερο πλήθος μετρήσεων.

Από το CLT, η τ.τ.
 $\frac{\mu_n - b}{\sigma_{\mu_n}} \sim \text{τυπική Γκαουσιανή}$

(α) Έστω:

 $A = \{ 5 \text{ φορτία από τη μεταφορική } S \text{ σε } 6 \text{ h μεταξύ } 09:00-15:00 \}$
 $B = \{ 7$

-11-

 $T \text{ σε } 8 \text{ h} \quad -11- \quad 16:00-24:00 \}$

Ζητούμε $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ καθώς τα A και B είναι ανεξάρτητα γεγονότα επειδή ορίζονται σε μη επικαλυπτόμενα μετρώ του χρονικά διαστήματα και επιπλέον αγοράζουν ανεξάρτητα ο.δ. Poisson.

Ορίζουμε: S_T : πλήθος φορτίων σε χρόνο T από την μεταφορική S
 T_T : -11- -11- -11- T .

 $S_{T_1} \sim \text{Poisson}(\lambda_S \cdot T_1)$, όπου $T_1 = 6 \text{ h} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ ημέρες

 $T_{T_2} \sim \text{Poisson}(\lambda_T \cdot T_2)$, όπου $T_2 = 8 \text{ h} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ ημέρες.

$$\therefore P(A) = P(S_{T_1} = 5) = \frac{(\lambda_S/4)^5}{5!} e^{-\lambda_S/4}$$

$$P(B) = P(T_{T_2} = 7) = \frac{(\lambda_T/3)^7}{7!} e^{-\lambda_T/3}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{(\lambda_S/4)^5 (\lambda_T/3)^7}{5! 7!} e^{-(\frac{\lambda_S}{4} + \frac{\lambda_T}{3})}$$

(β) Έστω R_T το πλήθος των συνολικών φορτίων και από τις δύο μεταφορικές που φτάνουν σε χρόνο $6 \text{ h} = \frac{1}{4}$ ημερών.

$$R_T \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda_S + \lambda_T}{4}\right); \quad E[R_T] = \frac{\lambda_S + \lambda_T}{4}$$

Έστω X_i το βάρος του i -ετού φορτίου.

$$E[X_i] = 0.5 \times 600 + 0.3 \times 1000 + 0.2 \times 2000 = 1000 \text{ τόνοι}$$

Το βάρος X των συνολικών φορτίων είναι:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{R_T} \Rightarrow$$

$$E[X] = E[X_i] \cdot E[R_T] = 1000 \frac{\lambda_S + \lambda_T}{4} = \underline{\underline{250(\lambda_S + \lambda_T)}}$$

- (8) Φορτία των 1000 τόνων από τη μεταφορική Τ γράννη σε Ηράκλειο σύμφωνα με μία β.δ. Poisson με ρυθμό (4)
 $\lambda_T \cdot P(X_i = 1000) = 0.3\lambda_T$

Συνεπώς ο χρόνος, T , έως τη λήψη 8 φορτίων ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 8 με παράμετρο $0.3\lambda_T$:

$$f_T(t) = \frac{(0.3\lambda_T)^8 \cdot t^7}{7!} e^{-0.3\lambda_T \cdot t} \quad \text{με}$$

$$E[T] = \frac{8}{0.3\lambda_T} \quad \text{ημέρες.}$$

- (6) Το πλήθος των φορτίων που φτάνει σε διάρκεια 1 ώρα $= \frac{1}{24}$ ημερών ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $(\lambda_S + \lambda_T)/24$.

$$N_{1/24} \sim \text{Poisson}((\lambda_S + \lambda_T)/24)$$

$$P(N_{1/24} = 0) = e^{-\frac{\lambda_S + \lambda_T}{24}}$$

Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $[P(N_{1/24} = 0)]^7$

$$e^{-\frac{7(\lambda_S + \lambda_T)}{24}}$$