

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Έστω συνεχής τ.μ. X , με ροπογεννήτρια συνάρτηση που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$M_X(s) = \frac{a - 3s}{s^2 - 6s + 8}$$

- (i) Να υπολογίσετε τη σταθερά a .
- (ii) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τ.μ. X .
- (iii) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της τ.μ. X , $E[X]$.
- (iv) Να υπολογίσετε τη διασπορά της τ.μ. X , $var(X)$.
- (v) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X \geq 2)$.

Λύση

- (i) Γνωρίζουμε ότι $M_X(s) \Big|_{s=0} = 1$. Άρα,

$$\begin{aligned} M_X(s) \Big|_{s=0} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{a}{8} &= 1 \\ \Rightarrow a &= 8. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$M_X(s) = \frac{8 - 3s}{s^2 - 6s + 8}$$

- (ii) Για να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της μοναδικότητας των ροπογεννητριών, θα πρέπει να μετατρέψουμε το παραπάνω κλάσμα σε ένα άθροισμα της γενικής μορφής $\sum_{\mathcal{X}} e^{sx} \cdot p_X(x)$, είτε σε ένα άθροισμα ή πολλαπλασιασμό κάποιων επί μέρους ροπογεννητριών γνωστών κατανομών.

Θυμηθείτε: Ο μετασχηματισμός ενός μείγματος κατανομών $f_Y(y) = p_1 f_{X_1}(y) + \dots + p_n f_{X_n}(y)$ ισούται με $M_Y(s) = p_1 M_{X_1}(s) + \dots + p_n M_{X_n}(s)$, ενώ ο μετασχηματισμός της κατανομής που προέρχεται από το άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ. $Z = X_1 + \dots + X_n$ ισούται με $M_Z(s) = M_{X_1} \times \dots \times M_{X_n}$.

Εδώ, αρχικά αναλύουμε σε απλά κλάσματα:

$$M_X(s) = \frac{8 - 3s}{s^2 - 6s + 8} = \frac{8 - 3s}{(s - 4)(s - 2)} \triangleq \frac{A}{s - 4} + \frac{B}{s - 2}$$

$$A = (s - 4) \cdot M_X(s) \Big|_{s=4} = \frac{8 - 3s}{s - 2} \Big|_{s=4} = \frac{8 - 12}{2} = -2$$

$$B = (s - 2) \cdot M_X(s) \Big|_{s=2} = \frac{8 - 3s}{s - 4} \Big|_{s=2} = \frac{8 - 6}{-2} = -1$$

Άρα

$$M_X(s) = \frac{-2}{s-4} + \frac{-1}{s-2}$$

Παρατηρούμε ότι μοιάζει με άθροισμα ροπογεννητριών εκθετικής τ.μ., όπου ισχύει γενικά ότι $M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda-s}$, όπου λ η παράμετρος της εκθετικής κατανομής. Μπορούμε να φέρουμε την $M_X(s)$ σε ένα μείγμα ροπογεννητριών εκθετικών κατανομών ως εξής:

$$M_X(s) = \frac{-2}{s-4} + \frac{-1}{s-2} = \frac{2}{4-s} + \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4-s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2-s}$$

Επομένως, η $M_X(s)$ είναι ένα μείγμα δύο ροπογεννητριών εκθετικών κατανομών, με παραμέτρους 4 και 2, αντίστοιχα. Επομένως, έχουμε

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}4 \cdot e^{-4x} + \frac{1}{2}2 \cdot e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(iii) A' Τρόπος

$$E[X] = \frac{d}{ds} M_X(s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(\frac{2}{4-s} + \frac{1}{2-s} \right) \Big|_{s=0} = \frac{2}{(4-s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} \Big|_{s=0} = \frac{2}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

B' Τρόπος

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2} (4 \cdot e^{-4x} + 2 \cdot e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} x \cdot 4e^{-4x} dx + \int_0^{+\infty} x \cdot 2e^{-2x} dx \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει είτε υπολογίζοντας αναλυτικά τα ολοκληρώματα, είτε παρατηρώντας ότι αυτά είναι οι μέσες τιμές των εκθετικών κατανομών με παραμέτρους 4 και 2, αντίστοιχα.

(iv) A' Τρόπος

$$E[X^2] = \frac{d^2}{ds^2} M_X(s) \Big|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{2}{4-s} + \frac{1}{2-s} \right) \Big|_{s=0} = \frac{2}{(4-s)^3} + \frac{1}{(2-s)^3} \Big|_{s=0} = \frac{5}{16}$$

Άρα

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{5}{16} - \left(\frac{3}{8} \right)^2 = \frac{11}{64}.$$

B' Τρόπος

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} (4 \cdot e^{-4x} + 2 \cdot e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} 4x^2 \cdot e^{-4x} dx + \int_0^{+\infty} 2x^2 \cdot e^{-2x} dx \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{4^2} + \frac{2}{2^2} \right) = \frac{5}{16}, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει είτε υπολογίζοντας αναλυτικά τα ολοκληρώματα, είτε παρατηρώντας ότι αυτά είναι οι ροπές δεύτερης τάξης των εκθετικών κατανομών με παραμέτρους 4 και 2, αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, η δεύτερη ροπή της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ , είναι $E[X^2] = \text{var}(X) + E^2[X] = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$

(v) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$\begin{aligned}P(X \geq 2) &= \int_2^{+\infty} f_X(x) dx = \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot e^{-4x} + \frac{1}{2} \cdot 2e^{-2x} \right) dx \\&= -\frac{1}{2} \int_2^{+\infty} -4 \cdot e^{-4x} dx - \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} -2 \cdot e^{-2x} dx \\&= -\frac{1}{2} \left[e^{-4x} \right]_2^{+\infty} - \frac{1}{2} \left[e^{-2x} \right]_2^{+\infty} = -\frac{1}{2}(0 - e^{-8}) - \frac{1}{2}(0 - e^{-4}) = \frac{e^{-8} + e^{-4}}{2}\end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Έστω οι τυχαίες ανεξάρτητες μεταβλητές X, Y . Θεωρούμε την τ.μ X *Poisson* με παράμετρο $\lambda_x = 4$ και την τ.μ Y εκθετική με παράμετρο $\lambda_y = 2$. Να βρεθούν:

(i) η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $Z = 3X + 2$.

(ii) η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $2X + 3Y$.

Λύση

Για την κατανομή Poisson με παράμετρο λ ισχύει ότι $M(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}$.

Για την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ ισχύει ότι $M(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$.

(i) Για τον γραμμικό συνδυασμό μιας τ.μ., $Z = aX + b$, ισχύει ότι:

$$M_Z(s) = E[e^{s(aX+b)}] = e^{sb} E[e^{saX}] = e^{sb} M_X(sa).$$

Επομένως,

$$M_{aX+b}(s) = M_{3X+2}(s) = e^{2s} M_X(3s) = e^{2s} \cdot e^{\lambda_X(e^s - 1)} = e^{2s} \cdot e^{4(e^s - 1)}.$$

(ii) Για το άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ. $Y = X_1 + \dots + X_n$, ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(X_1 + \dots + X_n)}] = E[e^{s(X_1)}] \times \dots \times E[e^{s(X_n)}] = M_{X_1}(s) \times \dots \times M_{X_n}(s).$$

Επομένως,

$$M_{2X+3Y}(s) = M_X(2s) \cdot M_Y(3s) = e^{\lambda_X(e^{2s} - 1)} \cdot \frac{\lambda_Y}{\lambda_Y - 3s} = e^{4(e^{2s} - 1)} \cdot \frac{2}{2 - 3s}.$$

Άσκηση 3.

Θεωρούμε διακριτή τ.μ. X για την οποία ισχύει ότι:

$$M_X(s) = a + be^s + ce^{2s},$$

$$E[X] = 1,$$

$$\text{var}(X) = 1/2$$

Υπολογίστε τις σταθερές a, b, c και τη σ.π. της τ.μ. X .

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

- $M_X(s) \Big|_{s=0} = 1 \quad (1)$

- $E[X]$ ισούται με την πρώτη παράγωγο της ροπογεννήτριας στο σημείο $s = 0$.
Άρα έχουμε:

$$E[X] = \frac{d}{ds} M_X(s) \Big|_{s=0} \quad (2)$$

- $E[X]$ ισούται με τη δεύτερη παράγωγο της ροπογεννήτριας στο σημείο $s = 0$.
Άρα έχουμε:

$$E[X^2] = \frac{d^2}{ds^2} M_X(s) \Big|_{s=0} \quad (3)$$

- $\text{var}(X) = E[X^2] - E^2[X] \quad (4)$

Άρα σύμφωνα με τις (1), (2), (3), (4):

$$(1) \Rightarrow a + b \cdot e^0 + c \cdot e^{2 \cdot 0} = 1 \Rightarrow a + b + c = 1 \quad (1')$$

$$(2) \Rightarrow \frac{d}{ds} (a + b \cdot e^s + c \cdot e^{2s}) \Big|_{s=0} = 1 \quad (E[X] = 1, \text{ από εκφώνηση})$$

$$\Rightarrow b \cdot e^s + 2 \cdot c \cdot e^{2s} \Big|_{s=0} = 1 \Rightarrow b \cdot e^0 + 2 \cdot c \cdot e^{2 \cdot 0} = 1 \Rightarrow b + 2c = 1 \quad (2')$$

$$(3) \Rightarrow \frac{d^2}{ds^2} (a + b \cdot e^s + c \cdot e^{2s}) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} (b \cdot e^s + 2 \cdot c \cdot e^{2s}) \Big|_{s=0}$$

$$= b \cdot e^s + 4 \cdot c \cdot e^{2s} \Big|_{s=0} = b + 4c \quad (3')$$

$$(4) \Rightarrow \frac{1}{2} = E[X^2] - 1 \quad (\text{var}(X) = \frac{1}{2}, \text{ από εκφώνηση})$$

$$\Rightarrow E[X^2] = 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow E[X^2] = \frac{3}{2} \quad (4')$$

$$(3'), (4') \Rightarrow b + 4c = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2} - 4c$$

$$(2') \Rightarrow \frac{3}{2} - 4c + 2c = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} - 1 = 2c \Rightarrow \frac{1}{2} = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

$$(2') \Rightarrow b + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$(1') \Rightarrow a + b + c = 1 \Rightarrow a = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

Άρα έχουμε συνολικά ότι:

$$a = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{1}{4}$$

Άρα τελικά έχουμε: $M_X(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^s + \frac{1}{4}e^{2s}$.

Για να βρούμε τη σ.π. της τ.μ. X , συγκρίνουμε την $M_X(s)$ με τη γενική έκφραση:

$$M_X(s) = \sum_x e^{sx} \cdot P_X(x)$$

Οπότε:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 0 \text{ ή } x = 2 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 4.

Θεωρούμε μια τ.μ. X με σ.π.π. $f(x) = 2e^{-2x}, x > 0$.

- (i) Να υπολογίσετε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση, $M_X(s)$ για τις τιμές του s για τις οποίες παίρνει πεπερασμένες τιμές.
- (ii) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της τ.μ. X και τη διασπορά.
- (iii) Έστω η τ.μ. Y , που ορίζεται από τη σχέση $Y = 3 - 5X$, να υπολογίσετε τη $M_Y(s)$ για τις τιμές του s για τις οποίες παίρνει πεπερασμένες τιμές.

Λύση

(i) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} M_X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{sx} f_X(x)) dx = \int_0^{\infty} e^{sx} 2e^{-2x} dx = \int_0^{\infty} 2e^{-(2-s)x} dx \\ &= -\frac{2}{2-s} e^{-(2-s)x} \Big|_0^{\infty} \quad (\text{για } s \neq 2 \text{ και για } 2-s > 0 \text{ ή } s < 2) = -\frac{2}{2-s} (0 - 1) = \frac{2}{2-s} \end{aligned}$$

Άρα, $M_X(s) = \frac{2}{2-s}, s < 2$

(ii) Για τη μέση τιμή και τη διασπορά έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{d}{ds} M_X(s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(\frac{2}{2-s} \right) \Big|_{s=0} = \frac{2}{(2-s)^2} \Big|_{s=0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ E[X^2] &= \frac{d^2}{ds^2} M_X(s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(\frac{2}{(2-s)^2} \right) \Big|_{s=0} = \frac{4}{(2-s)^3} \Big|_{s=0} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

οπότε είναι $var(X) = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

(iii) Έχουμε:

$$\begin{aligned} Y &= 3 - 5X = AX + B, \text{ με } A = -5, B = 3 \\ M_Y(s) &= e^{Bs} M_X(As) \\ &= e^{3s} M_X(-5s) \\ &= e^{3s} \cdot \left(\frac{2}{2+5s} \right) \\ &= 2 \cdot \frac{e^{3s}}{2+5s} \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

Σε έναν κινηματογράφο, ο αριθμός των ταινιών που προβάλλονται καθημερινά ακολουθεί κατανομή *Poisson* με παράμετρο λ . Η διάρκεια κάθε ταινίας είναι ανεξάρτητη από τη διάρκεια οποιασδήποτε άλλης, και είναι ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ 90 και 150 λεπτών. Ορίζουμε τις X_i : το ποσοστό ως προς το εύρος των τιμών της διάρκειας των ταινιών, που η διάρκεια υπερβαίνει τα 90 λεπτά. Έστω Y το άθροισμα όλων των X_i .

- (i) Ποια η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. Y ;
- (ii) Να υπολογίσετε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. Y .

Λύση

Έστω N ο αριθμός των ταινιών.

Εφόσον η N είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο λ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός που της αντιστοιχεί δίνεται από την εξής σχέση:

$$\begin{aligned} M_N(s) &= e^{\lambda(e^s - 1)} \\ E[N] &= \lambda \\ \text{var}(N) &= \lambda \end{aligned}$$

Έστω X_i ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες τ.μ. που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a, b] = [0, 1]$: $X_i \sim U[0, 1]$, καθώς $X \sim U[90, 150]$.

Αυτό γιατί X_i είναι ο λόγος ως προς το εύρος των τιμών της διάρκειας των ταινιών, δηλαδή $150 - 90 = 60$, που η διάρκεια υπερβαίνει τα 90 λεπτά. Άρα, $X_i = \frac{X - 90}{60}$.

$$\begin{aligned} f_{X_i}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \\ E[X_i] &= \mu_x = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} \\ E[X_i^2] &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} = \frac{1}{3} \\ \text{var}(X_i) &= \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12} \\ M_{X_i}(s) &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{e^{sb} - e^{sa}}{s} = \frac{e^s - 1}{s} \end{aligned}$$

- (i) Η τ.μ. Y είναι το άθροισμα ενός τυχαίου αριθμού N , τ.μ. X_i όπου η N είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο λ και $X_i \sim U[0, 1]$

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[N] \cdot E[X_i] = \lambda \cdot \frac{1}{2} = \lambda \cdot \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{2} \\ \text{var}(Y) &= E[N] \cdot \text{var}(X_i) + (E[X_i])^2 \cdot \text{var}(N) = \lambda \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \cdot \lambda = \frac{\lambda}{3} \end{aligned}$$

- (ii) Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη μέση τιμή της τ.μ. Y , ισχύει η σχέση (Wald's equation):

$$M_Y(s) = M_N(s) \Big|_{e^s = M_X(s)} = e^{\lambda(e^s - 1)} \Big|_{e^s = M_X(s)} = e^{\lambda(M_X(s) - 1)} = e^{\lambda(\frac{e^s - 1}{s} - 1)}$$