

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 04/03/2024

Ημερομηνία Παράδοσης: 18/03/2024

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΠΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Έστω ότι στις κατατακτήριες εξετάσεις του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών προσέρχονται 1000 υποψήφιοι αλλά οι διαθέσιμες θέσεις είναι μόνο 70. Για τα αποτελέσματα των εξετάσεων γνωρίζετε ότι ο μέσος βαθμός είναι 60 και η τυπική απόκλιση $\sigma = 6$. Αν ο βαθμός κάποιου υποψήφιου είναι 84, μπορεί να υποθέσει ότι θα είναι ένας από τους επιτυχόντες; Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Chebyshev.

Άσκηση 2

Σε ένα παιχνίδι με βελάκια ένας παίκτης έχει στη διάθεση του n βελάκια. Ανάλογα την περιοχή του στόχου που θα προσγειωθεί το βελάκι ο παίκτης μπορεί να κερδίσει από 1 έως και 6 πόντους. Έστω X_i , οι πόντοι της i -οστής ρίψης και $X_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Υποθέτουμε ότι οι διακριτές τ.μ. X_i είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες. Ορίζουμε το άθροισμα των ρίψεων: $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Υπολογίστε ένα άνω όριο για την πιθανότητα $P(S_{100} \geq 400)$:

- (α) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov.
- (β) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev.
- (γ) Χρησιμοποιώντας προσέγγιση με βάση το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 3

Η ποσότητα γατοτροφής που πωλείται εβδομαδιαία από ένα pet shop ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 50$ κιλά και τυπική απόκλιση $\sigma = 10$ κιλά. Η αρχική ποσότητα γατοτροφής που διαθέτει το pet shop είναι 74 κιλά και το pet shop εφοδιάζεται εβδομαδιαία με 47 κιλά την φορά.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα μετά από 11 εβδομάδες το συνολικό απόθεμα γατοτροφής του pet shop να είναι λιγότερο από 20 κιλά;
- (β) Με πόσα κιλά θα έπρεπε να εφοδιάζεται το pet shop κάθε εβδομάδα έτσι ώστε η πιθανότητα μετά από 11 εβδομάδες το συνολικό απόθεμα να είναι λιγότερο από 20 κιλά, να είναι ίση με 0.5%;

Άσκηση 4

Κατά τη διάρκεια της καλοκαιρινής πρακτικής άσκησης σας, εργάζεστε σ' ένα εργοστάσιο παραγωγής μικρο-επεξεργαστών. Ο επιβλέπων σας ζητά να εκτιμήσετε την ποιότητα της γραμμής παραγωγής, δηλαδή την πιθανότητα p ένας μικρο-επεξεργαστής να μην είναι ελαττωματικός. Υποθέτουμε ότι οι μικρο-επεξεργαστές είναι καλοί με την ίδια πιθανότητα p , και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο.

- (α) Υποθέτοντας ότι τεστάρετε ένα σύνολο από επιλεγμένους μικρο-επεξεργαστές, ορίστε μια εκτιμήτρια Z_n , για την παράμετρο p , ώστε η Z_n να συγκλίνει στο p ως προς την πιθανότητα.
- (β) Ο επιβλέπων σας ζητά η εκτιμήτρια Z_n , να βρίσκεται στη γειτονιά τιμών $p \pm 0.1$, με πιθανότητα 0.95. Αρκεί να τεστάρετε 27 επιλεγμένους μικρο-επεξεργαστές για να ικανοποιήσετε αυτήν την απαίτηση; Χρησιμοποιήστε τόσο την ανισότητα Chebyshev, όσο και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, για να απαντήσετε στο ερώτημα.

Άσκηση 5

Σε αυτή την άσκηση σας ζητείται να προσομοιώσετε μια εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, χρησιμοποιώντας το Matlab. Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα:

- (i) Δημιουργείστε $N = 1000$ ψευδοτυχαία δείγματα μιας ομοιόμορφης τ.μ. X στο διάστημα $[0, 1]$ και μίας Poisson τ.μ. Y με παράμετρο $\lambda = 2$. (**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε τις συναρτήσεις `random()`, `poissrnd()` με κατάλληλα ορίσματα για κάθε κατανομή.)
- (ii) Απεικονίστε τα ιστογράμματα των τ.μ. X και Y , για $n_bins = 20$. (**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε την συνάρτηση `histogram()` με κατάλληλα ορίσματα.)
- (iii) Δημιουργείστε $N = 10000$ ψευδοτυχαία δείγματα από $n = 40$ ομοιόμορφες τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ στο διάστημα $[0, 1]$ και από $n = 40$ Poisson τ.μ. $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ με παράμετρο $\lambda = 2$. (**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε τις συναρτήσεις `random()`, `poissrnd()` με κατάλληλα ορίσματα για κάθε κατανομή.)
- (iv) Θεωρείστε τους δειγματικούς μέσους όρους $M_{X_n} = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ και $M_{Y_n} = \frac{Y_1+Y_2+\dots+Y_n}{n}$ και απεικονίστε τα ιστογράμμά τους για $n_bins = 20$. Τι παρατηρείτε; Επιβαιβάζονται το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα; (**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε τις συναρτήσεις `mean()` και `histogram()` με κατάλληλα ορίσματα.)
- (v) Ορίστε τις τ.μ. $Z_{X_n} = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n-n\mu_X}{\sigma_X\sqrt{n}} = \frac{S_{X_n}-n\mu_X}{\sigma_X\sqrt{n}}$ και $Z_{Y_n} = \frac{Y_1+Y_2+\dots+Y_n-n\mu_Y}{\sigma_Y\sqrt{n}} = \frac{S_{Y_n}-n\mu_Y}{\sigma_Y\sqrt{n}}$ και δώστε τα ιστογράμμά τους για $n_bins = 20$. Ποιά η διαφορά από τις προηγούμενες κατανομές; (**Υπόδειξη:** Για μία ομοιόμορφη τ.μ. έχουμε $\mu = \frac{a+b}{2}$ και $\sigma^2 = \frac{1}{12}(a-b)^2$. Για μία Poisson τ.μ. έχουμε $\mu = \lambda$ και $\sigma^2 = \lambda^2$.)
- (vi) Εκτιμήστε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (σππ) των δειγματικών μέσων όρων M_{X_n} και M_{Y_n} , μέσω ιστογραμμάτων. (**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε την συνάρτηση `histogram()` με κατάλληλα ορίσματα για κάθε κατανομή, ώστε να λάβετε τόσο τον αριθμό των στοιχείων σε κάθε bin (counts) όσο και τη θέση του κάθε bin στον άξονα x 's (centers). Ακολουθώντας, εκτιμήστε την "πυκνότητα-εμβαδόν" κάθε bin μέσω της σχέσης: $p = \frac{bincounts}{binlength \cdot N}$)
- (vii) Εκτιμήστε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (σππ) των δειγματικών μέσων όρων M_{X_n} και M_{Y_n} , μέσω κανονικών (gaussian) κατανομών. (**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε την συνάρτηση `pdf()` με κατάλληλα ορίσματα για τις παραμέτρους των δειγματικών μέσων (M_{X_n} και M_{Y_n}) κάθε κατανομής.)

- (viii) Απεικονίστε σε κοινά διαγράμματα τις εκτιμήτριες των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας (σππ) των δειγματικών μέσων (M_{X_n} και M_{Y_n}) που βρήκατε στα παραπάνω ερωτήματα. Τι παρατηρείτε; (**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε την συνάρτηση `plot()` με κατάλληλα ορίσματα.)
- (ix) Παίξτε με τις μεταβλητές N , n_bins και n και καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας σε κάθε περίπτωση. Τι αλλάζει στις κατανομές; Υπάρχουν αλλαγές στις διασπορές; Δώστε τα αντίστοιχα ιστογράμματα. (π.χ. $N = 10000$, $n_bins = 100$, $n = 100$.)