

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 20/03/2024

Ημερομηνία Παράδοσης: 02/04/2024

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων. Μπορείτε, αν προτιμάτε, να χρησιμοποιήσετε προγράμματα τύπου Latex ή Word. Για τις προγραμματιστικές ασκήσεις θα πρέπει να παραδώσετε ό,τι ζητείται στην άσκηση.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Θέματα: Στοχαστικές Διαδικασίες Bernoulli, Στοχαστικές Διαδικασίες Poisson

Άσκηση 1.

Επισκέπτεστε ένα τροπικό δάσος την περίοδο των βροχών. Κάθε δευτερόλεπτο, ένα κουνούπι προσγειώνεται στο χέρι σας με πιθανότητα 0.5, ανεξάρτητα από το τι συμβαίνει σε οποιοδήποτε άλλο δευτερόλεπτο. Εάν ένα κουνούπι προσγειωθεί στο χέρι σας, τότε με πιθανότητα 0.2 σας τσιμπάει και με πιθανότητα 0.8 δεν σας ενοχλεί, ανεξάρτητα από τα άλλα κουνούπια.

(α) Ποιο είναι το αναμενόμενο χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών τσιμπημάτων κουνουπιού;

(β) Ποια είναι η διασπορά του χρόνου μεταξύ διαδοχικών τσιμπημάτων κουνουπιού;

Επιπλέον, κάθε δευτερόλεπτο ένα τσιμπούρι περπατάει στο πόδι σας με πιθανότητα 0.1, ανεξάρτητα από το τι συμβαίνει σε οποιοδήποτε άλλο δευτερόλεπτο. Εάν ένα τσιμπούρι σας ακουμπήσει, με πιθανότητα 0.7 σας δαγκώνει και με πιθανότητα 0.3 δεν σας ενοχλεί, ανεξάρτητα από άλλα τσιμπούρια και κουνούπια.

(γ) Ποιο είναι το αναμενόμενο χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών τσιμπημάτων είτε κουνουπιού είτε τσιμπουριού;

(δ) Ποια είναι η διασπορά του χρόνου μεταξύ διαδοχικών τσιμπημάτων τσιμπουριού είτε κουνουπιού;

Άσκηση 2.

Σε μια συγκεκριμένη αεροπορική πτήση που εξυπηρετείται από αεροπλάνο 80 θέσεων έχει παρατηρηθεί ότι 4 επιβάτες κατά μέσο όρο δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση.

Ο αριθμός X των επιβατών που δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση ακολουθεί την κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας $P(X = x) = e^{-4} \frac{4^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$

- α') Ποια είναι η πιθανότητα άτομο που βρίσκεται στη δεύτερη θέση του καταλόγου αναμονής να ταξιδεύσει;
- β') Ποια είναι η πιθανότητα άτομο που βρίσκεται στην πέμπτη θέση του καταλόγου αναμονής να ταξιδεύσει;

Άσκηση 3.

Μια γέφυρα τρένου κατασκευάζεται πάνω σε έναν πλατύ ποταμό. Τα τρένα φτάνουν στη γέφυρα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda=3$ ανά ημέρα.

- α') Αν ένα τρένο φτάνει την ημέρα 0, βρείτε την πιθανότητα να μην υπάρχουν τρένα τις ημέρες 1, 2 και 3.
- β') Βρείτε την πιθανότητα ότι το επόμενο τρένο που θα φτάσει μετά το πρώτο τρένο την ημέρα 0 θα χρειαστεί περισσότερες από 3 ημέρες για να φτάσει.
- γ') Βρείτε την πιθανότητα ότι δεν θα φτάσουν τρένα τις πρώτες 2 ημέρες, αλλά 4 τρένα θα φτάσουν την 4η μέρα.
- δ') Βρείτε την πιθανότητα ότι θα χρειαστούν περισσότερες από 2 ημέρες για το 5ο τρένο να φτάσει στη γέφυρα.

Άσκηση 4.

Ένα κατάστημα διαφημίζει ότι δίνει ένα μικρό δώρο σε κάθε 13^ο αφικνούμενο πελάτη. Εάν οι αφίξεις πελατών μοντελοποιούνται από μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ ,

- α') δώστε την κατανομή των χρόνων μεταξύ αφίξεων διαδοχικών τυχερών πελατών,
- β') υπολογίστε την πιθανότητα $P(M_t = k)$ για τον αριθμό των δώρων M_t που δίδονται από το κατάστημα στο διάστημα $[0, t]$ σαν συνάρτηση των λ , t και k ,
- γ') για $\lambda = 20$ πελάτες ανά ώρα, υπολογίστε την πιθανότητα το κατάστημα να δώσει περισσότερα από δύο δώρα σε διάστημα μίας ώρας.

Άσκηση 5.

Η Μάρθα λαμβάνει μέρος στο αγώνισμα της σκοποβολής και της ζητείται να πετύχει όσους στόχους μπορεί σε 10 βολές. Η Μάρθα πετυχαίνει τον στόχο με πιθανότητα $\frac{3}{4}$.

- α') Βρείτε την πιθανότητα να πετύχει ακριβώς 7 στόχους.
- β') Βρείτε τον μέσο αριθμό στόχων που η Μάρθα θα πετύχει πριν αστοχήσει τρεις φορές.
- γ') Βρείτε την πιθανότητα να πετύχει τον στόχο στις δύο πρώτες προσπάθειες και να αστοχήσει στην τρίτη και τέταρτη προσπάθεια.
- δ') Βρείτε την πιθανότητα να αστοχεί σε μία βολή πριν ευστοχήσει διαδοχικά σε τρεις.

Άσκηση 6.

Υποθέστε ότι για 5 λεπτά παρατηρείτε τον σύννεφα που παίρνουν από τον ουρανό και προσπαθείτε να μαντέψετε τί φιγούρα σχηματίζουν. Γνωρίζετε ότι κατά μέσο όρο, παίρνουν 3 σύννεφα το λεπτό. Συνεπώς, η συχνότητα με την οποία παίρνάνε τα σύννεφα για την περίοδο 5 λεπτών είναι $\lambda=15$, δηλαδή, περιμένετε να δείτε κατά μέσο όρο 15 διαφορετικά σύννεφα να παίρνουν σε διάστημα 5 λεπτών.

- α') Χρησιμοποιώντας όποια προγραμματιστική γλώσσα θέλετε, προσομοιώστε το παραπάνω γεγονός ως μία διαδικασία Poisson, χωρίζοντας το διάστημα των 5 λεπτών σε 300 διαστήματα του ενός δευτερολέπτου. Αποθηκεύστε σε μία μεταβλητή τον αριθμό των σύννεφων που περνούν και παρουσιάστε ένα γράφημα με την διαδικασία.
- β') Με τον ίδιο τρόπο, προσπαθήστε να αναπαραστήσετε 10.000 πεντάλεπτες περιόδους παρατήρησης σύννεφων. Αποθηκεύστε σε μία μεταβλητή τον πίνακα με το σύνολο των σύννεφων για κάθε διάστημα 5 λεπτών και βρείτε την μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τη διασπορά.
- γ') Δημιουργήστε ένα γράφημα στο οποίο παρουσιάζετε τα δεδομένα από το προηγούμενο ερώτημα και την πραγματική κατανομή που δημιουργεί η αντίστοιχη έτοιμη συνάρτηση της προγραμματιστικής γλώσσας που χρησιμοποιείτε (π.χ `poisspdf()` του MATLAB). Σχολιάστε κατά πόσο τα προσομοιωμένα δεδομένα ταιριάζουν με την πραγματική κατανομή.
- δ') Η διωνυμική κατανομή (n,p) μπορεί να προσεγγιστεί από την διαδικασία Poisson για $\lambda=np$, όταν το n παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Χρησιμοποιείτε την συνάρτηση της προγραμματιστικής γλώσσας που χρησιμοποιείτε για την μοντελοποίηση Poisson διαδικασιών (π.χ `poisspdf()` του MATLAB), για να δημιουργήσετε μία διαδικασία Poisson με $\lambda=4$ για τις τιμές από 0 έως 12. Στη συνέχεια, χρησιμοποιείτε την συνάρτηση για την δημιουργία διωνυμικών κατανομών (π.χ `binopdf()` του MATLAB), για να δημιουργήσετε μία διωνυμική κατανομή. Τέλος, αναπαραστήστε σε ένα γράφημα την διαδικασία Poisson (π.χ με την συνάρτηση `stem()` του MATLAB) και την διωνυμική κατανομή.

Παραθέστε τα ζητούμενα γραφήματα και μία μικρή αναφορά με τις παρατηρήσεις σας για τα αποτελέσματα.