

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

- (α) Έστω X = χρόνος μεταξύ διαδοχικών τσιμπημάτων από κουνούπια. Τα τσιμπήματα από κουνούπια συμβαίνουν σύμφωνα με ένα διαδικασία *Bernoulli* με παράμετρο $p = 0.5 * 0.2 = 0.1$. Το X είναι μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή, έτσι η $E[X] = 1/p = 1/0.1 = 10$ δευτερόλεπτα.
- (β) Η διασπορά του X είναι: $var(X) = (1 - p)/p^2 = (1 - 0.1)/0.1^2 = 90$.
- (γ) Τα τσιμπήματα από κουνούπια συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία *Bernoulli* με παράμετρο $p = 0.1$. Τα τσιμπήματα από τσιμπούρια συμβαίνουν σύμφωνα με μια άλλη ανεξάρτητη διαδικασία *Bernoulli* με παράμετρο $q = 0.1 * 0.7 = 0.07$. Τα τσιμπήματα από έντομα (κουνούπια ή τσιμπούρια) συμβαίνουν σύμφωνα με μια συγχωνευμένη διαδικασία *Bernoulli* από τις διαδικασίες κουνουπιού και τσιμπουριού. Επομένως, η πιθανότητα επιτυχίας σε οποιοδήποτε χρονικό σημείο για τη συγχωνευμένη διαδικασία *Bernoulli* είναι $r = p + q - p * q = 0.1 + 0.07 - 0.1 * 0.07 = 0.163$. Έστω Y ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών τσιμπημάτων από έντομα. Όπως και πριν, το Y είναι μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή, έτσι η $E[Y] = 1/r = 0.163 \approx 6.135$.
- (δ) Η διασπορά του Y είναι: $var(Y) = (1 - r)/r^2 = (1 - 0.163)/0.163^2 \approx 31.503$.

Άσκηση 2.

- α') Για να ταξιδεύσει ο 2ος επιβάτης του καταλόγου αναμονής, θα πρέπει να μην προσέλθουν τουλάχιστον 2 από τους επιβάτες που ήταν προγραμματισμένο να πετάξουν. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:
- $$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.0183 - 0.0733 = 0.9084.$$
- β') Για να ταξιδεύσει ο 5ος επιβάτης του καταλόγου αναμονής, θα πρέπει να μην προσέλθουν τουλάχιστον 5 από τους επιβάτες που ήταν προγραμματισμένο να πετάξουν. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(X \geq 5) = 1 - \sum_{x=0}^4 P(X = x) = 1 - \sum_{x=0}^4 e^{-4} \frac{4^x}{x!}.$$

Άσκηση 3.

- α') Ο αριθμός των τρένων που φτάνουν τις ημέρες 1, 2 και 3 είναι ανεξάρτητος από τον αριθμό των τρένων που φτάνουν την ημέρα 0. Ας συμβολίσουμε με N τον συνολικό αριθμό των τρένων που φτάνουν τις ημέρες 1, 2 και 3. Τότε το N είναι μια τυχαία μεταβλητή *Poisson* με παράμετρο $3\lambda = 9$, και έχουμε
- $$P(\text{κανένα τρένο τις μέρες 1,2,3} \mid \text{ένα τρένο την μέρα 1}) = P(\text{κανένα τρένο τις μέρες 1,2,3}) = P(N = 0) = e^{-9} * 9^0 / 0! = e^{-9}.$$
- β') Το γεγονός ότι η επόμενη άφιξη είναι περισσότερο από τρεις ημέρες μετά την άφιξη του τρένου την ημέρα 0 είναι το ίδιο με το γεγονός ότι δεν υπάρχουν άφιξεις τις τρεις ημέρες μετά την άφιξη του τρένου την ημέρα 0. Επομένως, η απαιτούμενη πιθανότητα είναι η ίδια με αυτή που βρέθηκε στο μέρος (α), δηλαδή, e^{-9} .

- γ') Ο αριθμός των τρένων που φτάνουν τις πρώτες 2 ημέρες είναι ανεξάρτητος από τον αριθμό των τρένων που φτάνουν την ημέρα 4. Επομένως, έχουμε
 $P(\text{κανένα τραίνο τις μέρες 1,2 και 4 τραίνα την μέρα 4}) =$
 $= P(\text{κανένα τραίνο τις πρώτες 2 μέρες}) P(4 \text{ τραίνα την μέρα 4}) =$
 $= e^{-2\lambda} (2\lambda)^0 / 0! * e^{-\lambda} \lambda^4 / 4! = e^{-9} 3^4 / 4! .$
- δ') Το γεγονός ότι απαιτούνται περισσότερες από 2 ημέρες για την 5η άφιξη είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι υπάρχουν το πολύ 4 άφιξεις τις πρώτες 2 ημέρες. Επομένως, η απαιτούμενη πιθανότητα είναι ίση με
 $\sum_{k=0}^4 P(\text{ακριβώς } k \text{ αφιξεις τις πρώτες 2 μέρες}) = e^{-2\lambda} (2\lambda)^k / k! =$
 $= e^{-6} (1 + 6 + 18 + 36 + 54) = 115e^{-6} .$

Άσκηση 4.

- α') Για να βρούμε την κατανομή μεταξύ αφίξεων διαδοχικών τυχερών πελατών θα ορίσουμε την τ.μ. $Y_i = X_1 + X_2 + \dots + X_{12}$ ως τον χρόνο μεταξύ αφίξεων διαδοχικών "τυχερών" πελατών, όπου X_j ο χρόνος μεταξύ της άφιξης του $j - 1$ -στου και j -στου πελάτη. Οι X είναι i.i.d. και ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Συνεπώς, η κατανομή της Y θα είναι Erlang τάξης $k = 13$, με κατανομή:

$$f_{Y_{13}}(y) = \frac{\lambda^{13} y^{12} e^{-\lambda y}}{12!}$$

- β') Έχουμε

$$P(M_t = k) = P(M_t \geq k) - P(M_t \geq k + 1) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{k + 1!}$$

- γ') Χρησιμοποιώντας τον τύπο του (β) υπολογίζουμε αντικαθιστώντας στην παρακάτω σχέση, για $\lambda = 20$.

$$P(M_t \geq 2) = 1 - (P(M_t = 0) + P(M_t = 1) + P(M_t = 2))$$

Άσκηση 5.

Το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί ως μια διαδικασία Bernoulli με παραμέτρους ($n = 10, p = 0.75$).

- α') Χρησιμοποιώντας τη διωνυμική,

$$P_S(k = 7) = \binom{10}{7} \left(\frac{3}{4}\right)^7 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} \left(\frac{3}{4}\right)^7 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \approx 120 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0.24$$

- β') Ο αναμενόμενος αριθμός προσπαθειών της Μάρθας μέχρι την τρίτη αποτυχία είναι η μέση τιμή μιας Pascal τυχαίας μεταβλητής Y_k τάξεως $k = 3$ με παράμετρο $p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Έτσι $E[Y_k] = \frac{k}{p} = 3 \cdot 4 = 12$, και άρα ο αναμενόμενος αριθμός στόχων που θα πετύχει έως την τρίτη αποτυχία της είναι $E[Y_k] - 3 = 12 - 3 = 9$.

- γ')

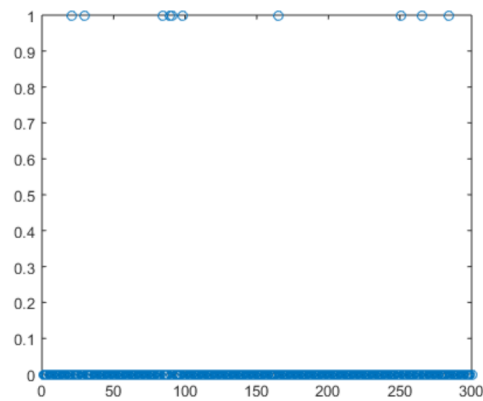
$$P = p^2 \cdot (1 - p)^2 = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{16} = \frac{9}{256}$$

- δ') Και πάλι, λόγω έλλειψης μνήμης (ανεξαρτησίας),

$$P = (1 - p) \cdot p^3.$$

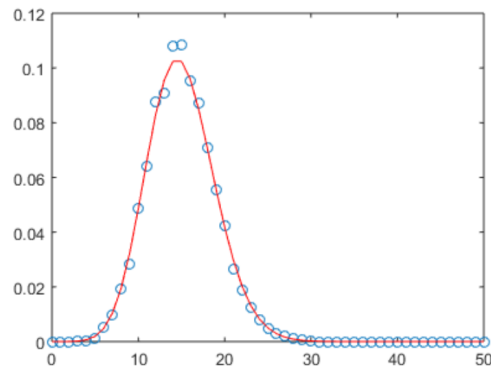
Άσκηση 6.

α') Στο παρακάτω γράφημα βλέπουμε την διαδικασία Poisson που ακολουθεί η παρατήρηση των σύννεφων. Η γραμμή στο κάτω μέρος του γραφήματος συμβολίζει τα δευτερόλεπτα όπου δεν παρνάει κάποιο σύννεφο.



β') Χρησιμοποιούμε την συνάρτηση $mean()$ για να υπολογίσουμε την μέση τιμή, την συνάρτηση $std()$ για την τυπική απόκλιση και την $std()^2$ για την διακύμανση.

γ') Παρακάτω μπορούμε να δούμε γραφικά την κατανομή που δημιουργήσαμε και τα δεδομένα της κατανομής που δημιουργεί η έτοιμη συνάρτηση $poispdf()$. Παρατηρούμε ότι τα δεδομένα της προσομοιωμένης κατανομής είναι αρκετά κοντά στην κατανομή που μας δίνει η έτοιμη συνάρτηση.



δ') Παρακάτω μπορούμε να δούμε το γράφημα της διαδικασίας Poisson και της διωνυμικής κατανομής, η οποία συμβολίζεται με '+'.

