

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 08/04/2024

Ημερομηνία Παράδοσης: 24/04/2024

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας *e – learn* του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με *e – mail*, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα *pdf* που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Ένας ιός μπορεί να υπάρχει σε N διαφορετικές μεταλλάξεις, αριθμημένες από 1 έως N . Σε κάθε γενιά ο ιός μεταλλάσσεται με πιθανότητα $\alpha \in (0, 1)$ σε ένα άλλο στέλεχος, με μετάλλαξη που επιλέγεται τυχαία με ίση πιθανότητα.

1. Υπολογίστε τον μέσο αριθμό γενεών για να βρεθεί ξανά ο ιός στην ίδια μετάλλαξη.

Έστω $N = 4$ και $\alpha = \frac{2}{3}$.

2. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η μετάλλαξη στην έκτη γενιά του ιού είναι ίδια με αυτήν στην πρώτη.
3. Υποθέτοντας ότι ο ιός είναι αρχικά στην μετάλλαξη 1 ή 4, υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο ιός δεν μεταλλάσσεται ποτέ σε 2 και 3 κατά τις πρώτες έξι γενιές.

Άσκηση 2

Σε ένα παιχνίδι αναγραμματισμού, σε κάθε γύρο δίνεται μία λέξη τριών γραμμάτων που σχηματίζεται χρησιμοποιώντας τα γράμματα Α, Β και Γ, και μια νέα λέξη παράγεται επιλέγοντας δύο θέσεις $\{i, j\}$, $i, j = 1, 2, 3, i < j$, και ανταλλάσσοντας τα γράμματα σε αυτές τις θέσεις. Για παράδειγμα, αν η τρέχουσα λέξη είναι ΑΒΓ και επιλέγονται οι θέσεις $\{1, 2\}$, η επόμενη λέξη είναι ΒΑΓ. Οι πιθανότητες επιλογής των θέσεων $\{1, 2\}$ και $\{1, 3\}$ είναι $1/4$ και $1/8$ αντίστοιχα.

1. Μοντελοποιήστε το παιχνίδι μέσω μιας αλυσίδας Μαρκόβ, υποθέτοντας ότι όλες οι λέξεις είναι αρχικά εξίσου πιθανές.

2. Υπολογίστε την πιθανότητα, ξεκινώντας από τη λέξη ABΓ, να παραχθεί τελικά η λέξη ΓΑΒ χωρίς να έχει παραχθεί η λέξη ΓΒΑ.
3. Υπολογίστε την πιθανότητα, ξεκινώντας από τη λέξη ABΓ, να παραχθεί τελικά ξανά η ίδια λέξη χωρίς προηγουμένως να παραχθεί η λέξη ΓΑΒ.
4. Υπολογίστε το μέσο αριθμό των λέξεων που παράγονται για να προκύψει η λέξη ΓΑΒ ξεκινώντας από τη λέξη ABΓ.

Άσκηση 3

Μια μικρή αποθήκη χωράει το πολύ τρεις παλέτες. Κάθε ώρα ένα φορτηγό έρχεται για να μαζέψει τις αποθηκευμένες παλέτες. Ανάλογα με τον διαθέσιμο χώρο του, το μέγιστο πλήθος παλετών που μπορεί να μαζέψει το φορτηγό είναι 0 με πιθανότητα $p_0 = 0.1$, 1 με πιθανότητα $p_1 = 0.2$, 2 με πιθανότητα $p_2 = 0.4$ και 3 με πιθανότητα $p_3 = 0.3$. Το φορτηγό μαζεύει πάντα όσες παλέτες είναι δυνατόν σύμφωνα με αυτό το περιορισμό. Το πλήθος των παλετών που φτάνουν στην αποθήκη κατά τη διάρκεια μιας ώρας είναι μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές 0 με πιθανότητα $q_0 = 0.3$, 1 με πιθανότητα $q_1 = 0.4$ και 2 με πιθανότητα $q_2 = 0.3$. Οι παλέτες που φτάνουν όταν η αποθήκη είναι γεμάτη απορρίπτονται. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι φόρτωσης και εκφόρτωσης των παλετών είναι αμελητέοι.

1. Μοντελοποιήστε το σύστημα μέσω μιας αλυσίδας Μαρκόβ.
2. Στην σταθερή κατάσταση, υπολογίστε τον μέσο αριθμό παλετών στην αποθήκη μετά την αναχώρηση ενός φορτηγού.
3. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο αριθμός των παλετών στην αποθήκη μετά την αναχώρηση ενός φορτηγού είναι δύο για ακριβώς τρεις συνεχόμενες φορές.

Άσκηση 4

Μοντελοποιούμε την κίνηση που παράγει στο δίκτυο ένας χρήστης με μία Μαρκοβιανή στοχαστική διαδικασία $X(t)$ με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$ Mbps. Η κίνηση που παράγει ο χρήστης λαμβάνει μια νέα τιμή κάθε 1 δευτερόλεπτο, και έχει τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0 \end{bmatrix}$$

1. Σχεδιάστε μια πιθανή πραγματοποίηση της $X(t)$ με μήκος 10 δευτερόλεπτα.
2. Σχεδιάστε την Μαρκοβιανή αλυσίδα που μοντελοποιεί την $X(t)$.
3. Εξηγήστε γιατί η $X(t)$ είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία. Είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία γεννήσεως-θανάτου;
4. Γράψτε τις γενικές και τις τοπικές εξισορροπίες ισορροπίας.
5. Υπολογίστε την κατανομή σταθερής κατάστασης.
6. Υπολογίστε τον μέσο όρο της κίνησης που παράγεται από τον χρήστη, δηλαδή την $E[X(t)]$.