

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2024  
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 08/04/2024

Ημερομηνία Παράδοσης: 24/04/2024

## Άσκηση 1

Ένας ιός μπορεί να υπάρχει σε  $N$  διαφορετικές μεταλλάξεις, αριθμημένες από 1 έως  $N$ . Σε κάθε γενιά ο ιός μεταλλάσσεται με πιθανότητα  $\alpha \in (0, 1)$  σε ένα άλλο στέλεχος, με μετάλλαξη που επιλέγεται τυχαία με ίση πιθανότητα.

1. Υπολογίστε τον μέσο αριθμό γενεών για να βρεθεί ξανά ο ιός στην ίδια μετάλλαξη.

Έστω  $N = 4$  και  $\alpha = \frac{2}{3}$ .

2. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η μετάλλαξη στην έκτη γενιά του ιού είναι ίδια με αυτήν στην πρώτη.
3. Υποθέτοντας ότι ο ιός είναι αρχικά στην μετάλλαξη 1 ή 4, υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο ιός δεν μεταλλάσσεται ποτέ σε 2 και 3 κατά τις πρώτες έξι γενιές.

## Λύση

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \frac{\alpha}{N-1} & \frac{\alpha}{N-1} & \cdots & \frac{\alpha}{N-1} \\ \frac{\alpha}{N-1} & 1-\alpha & \frac{\alpha}{N-1} & \cdots & \frac{\alpha}{N-1} \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{\alpha}{N-1} & \frac{\alpha}{N-1} & \frac{\alpha}{N-1} & \cdots & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

1. Η αλυσίδα είναι αperiοδική και με μία μοναδική κλάση επικοινωνίας, επομένως η κατανομή σταθερής κατάστασης υπάρχει. Οι πιθανότητες σταθερής κατάστασης  $\pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_N]$  δίνονται από την λύση του συστήματος εξισώσεων

$$\pi = \pi P \Rightarrow \pi_j = \sum_{i \in \{1, \dots, N\} \setminus j} \frac{\alpha}{N-1} \pi_i + (1-\alpha) \pi_j \Rightarrow \pi_j = \sum_{i \in \{1, \dots, N\} \setminus j} \frac{1}{N-1} \pi_i \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$$
$$\sum_{j=1}^N \pi_j = 1,$$

από τις οποίες εύκολα βγάζουμε ότι  $\pi = [\frac{1}{N} \ \frac{1}{N} \ \dots \ \frac{1}{N}]$ .

Άρα, σε κάθε χρονική στιγμή, ο ιός είναι στην μετάλλαξη  $i$  με πιθανότητα  $\frac{1}{N}$ . Αυτό σημαίνει ότι κατά μέσο όρο χρειάζονται  $N$  βήματα ώστε η μετάλλαξη είναι η  $i$ .

2. Για αυτές τις παραμέτρους, έχουμε

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Η άσκηση ουσιαστικά μας ζητάει την πιθανότητα να μην έχει αλλάξει μετάλλαξη ο ιός μετά από 5 βήματα. Αυτό δίνεται από  $r_{i,i}(5) = P_{i,i}^{(5)}$ , το οποίο μπορεί να υπολογιστεί και είναι ίσο με  $\frac{4921}{13683}$ .

- Ξεκινώντας από την κατάσταση 1 ή 4, η πιθανότητα στην επόμενη γεννιά να βρισκόμαστε πάλι στην κατάσταση 1 ή 4 είναι η  $P_{\{1,4\},\{1,4\}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$ . Η πιθανότητα για τις επόμενες 5 συνεχόμενες γεννιές να παραμείνουμε σε αυτές τις καταστάσεις είναι ίση με  $(P_{\{1,4\},\{1,4\}})^5 \approx 0.0529$ .

Προσοχή:  $(P_{\{1,4\},\{1,4\}})^5$  είναι η 5η δύναμη της πιθανότητας  $P_{\{1,4\},\{1,4\}}$  - δεν υψώνουμε τον πίνακα στην δύναμη.

## Άσκηση 2

Σε ένα παιχνίδι αναγραμματισμού, σε κάθε γύρο δίνεται μία λέξη τριών γραμμάτων που σχηματίζεται χρησιμοποιώντας τα γράμματα Α, Β και Γ, και μια νέα λέξη παράγεται επιλέγοντας δύο θέσεις  $\{i, j\}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, i < j$ , και ανταλλάσσοντας τα γράμματα σε αυτές τις θέσεις. Για παράδειγμα, αν η τρέχουσα λέξη είναι ΑΒΓ και επιλέγονται οι θέσεις  $\{1, 2\}$ , η επόμενη λέξη είναι ΒΑΓ. Οι πιθανότητες επιλογής των θέσεων  $\{1, 2\}$  και  $\{1, 3\}$  είναι  $1/4$  και  $1/8$  αντίστοιχα.

- Μοντελοποιήστε το παιχνίδι μέσω μιας αλυσίδας Μαρκόβ, υποθέτοντας ότι όλες οι λέξεις είναι αρχικά εξίσου πιθανές.
- Υπολογίστε την πιθανότητα, ξεκινώντας από τη λέξη ΑΒΓ, να παραχθεί τελικά η λέξη ΓΑΒ χωρίς να έχει παραχθεί η λέξη ΓΒΑ.
- Υπολογίστε την πιθανότητα, ξεκινώντας από τη λέξη ΑΒΓ, να παραχθεί τελικά ξανά η ίδια λέξη χωρίς προηγουμένως να παραχθεί η λέξη ΓΑΒ.
- Υπολογίστε το μέσο αριθμό των λέξεων που παράγονται για να προκύψει η λέξη ΓΑΒ ξεκινώντας από τη λέξη ΑΒΓ.

## Λύση

- Έστω  $r_{12} = 1/4$ ,  $r_{13} = 1/8$ ,  $r_{23} = 5/8$ , όπου  $r_{ij}$  η πιθανότητα επιλογής των θέσεων  $i, j$  για ανταλλαγή γραμμάτων.

Ο πίνακας μεταβάσεων είναι ο εξής:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \underline{ΑΒΓ} & \underline{ΒΑΓ} & \underline{ΓΒΑ} & \underline{ΑΓΒ} & \underline{ΓΑΒ} & \underline{ΒΓΑ} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underline{ΑΒΓ} \\ \underline{ΒΑΓ} \\ \underline{ΓΒΑ} \\ \underline{ΑΓΒ} \\ \underline{ΓΑΒ} \\ \underline{ΒΓΑ} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} & r_{23} & 0 & 0 \\ r_{12} & 0 & 0 & 0 & r_{13} & r_{23} \\ r_{13} & 0 & 0 & 0 & r_{23} & r_{12} \\ r_{23} & 0 & 0 & 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{13} & r_{23} & r_{12} & 0 & 0 \\ 0 & r_{23} & r_{12} & r_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Η αρχική κατανομή είναι η  $\pi_0 = [\frac{1}{6} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{6}]$ .

- Τροποποιούμε το μοντέλο κάνοντας τις καταστάσεις ΓΑΒ και ΓΒΑ σε καταστάσεις απορρόφησης. Δηλαδή οι πιθανότητες  $P(\Gamma\text{ΑΒ} \mid \Gamma\text{ΑΒ})$  και  $P(\Gamma\text{ΒΑ} \mid \Gamma\text{ΒΑ})$  γίνονται 1. Έτσι μελετάμε τις πιθανότητες αν βρεθούμε στην μία από τις δύο να μην επισκεφθούμε ποτέ την άλλη.

$$P' = \begin{matrix} & \begin{matrix} \underline{ΑΒΓ} & \underline{ΒΑΓ} & \underline{ΓΒΑ} & \underline{ΑΓΒ} & \underline{ΓΑΒ} & \underline{ΒΓΑ} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underline{ΑΒΓ} \\ \underline{ΒΑΓ} \\ \underline{ΓΒΑ} \\ \underline{ΑΓΒ} \\ \underline{ΓΑΒ} \\ \underline{ΒΓΑ} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} & r_{23} & 0 & 0 \\ r_{12} & 0 & 0 & 0 & r_{13} & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ r_{23} & 0 & 0 & 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_{23} & r_{12} & r_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Ακόμη, η αρχική κατανομή τώρα είναι  $\pi'_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ .

Η απάντηση είναι το πέμπτο στοιχείο (δηλ. της κατάστασης ΓΑΒ) του διανύσματος  $\Pi$ , όπου

$$\Pi = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi'_0 P''^t,$$

το οποίο αν θέσουμε κάποιο πολύ μεγάλο  $t$  στην *MATLAB* θα μας επιστρέψει περίπου 0.508.

Αναλυτικότερα όμως, η πιθανότητα απορρόφησης από την κατάσταση ΓΑΒ, ξεκινώντας από την κατάσταση  $i$ , έστω  $\alpha_i$ , υπολογίζονται μέσω του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned}\alpha_{\Gamma\text{AB}} &= 1 \\ \alpha_{\Gamma\text{BA}} &= 0 \\ \alpha_{\text{AB}\Gamma} &= r_{12}\alpha_{\text{BA}\Gamma} + r_{13}\alpha_{\Gamma\text{BA}} + r_{23}\alpha_{\text{A}\Gamma\text{B}} \\ \alpha_{\text{BA}\Gamma} &= r_{12}\alpha_{\text{AB}\Gamma} + r_{13}\alpha_{\Gamma\text{AB}} + r_{23}\alpha_{\text{B}\Gamma\text{A}} \\ \alpha_{\text{A}\Gamma\text{B}} &= r_{23}\alpha_{\text{AB}\Gamma} + r_{12}\alpha_{\Gamma\text{AB}} + r_{13}\alpha_{\text{B}\Gamma\text{A}} \\ \alpha_{\text{B}\Gamma\text{A}} &= r_{23}\alpha_{\text{BA}\Gamma} + r_{12}\alpha_{\Gamma\text{BA}} + r_{13}\alpha_{\text{A}\Gamma\text{B}}\end{aligned}$$

το οποίο λύνοντάς το έχουμε ότι  $\alpha_{\text{AB}\Gamma} = \frac{33}{65} \approx 0.5077$ .

3. Τροποποιούμε το μοντέλο κάνοντας την κατάσταση ΓΑΒ απορροφήσεως και φτιάχνοντας μια νέα κατάσταση ΑΒΓ2, η οποία αναπαριστά το ενδεχόμενο να μεταβούμε για δεύτερη φορά (τουλάχιστον) στην ΑΒΓ. Δηλαδή και η ΑΒΓ είναι απορροφήσεως. Έτσι εξετάζουμε τις πιθανότητες να μεταβούμε για δεύτερη φορά στην ΑΒΓ πριν μεταβούμε για πρώτη φορά στην ΓΑΒ.

$$P'' = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \underline{\text{AB}\Gamma} \\ \underline{\text{BA}\Gamma} \\ \underline{\Gamma\text{BA}} \\ \underline{\text{A}\Gamma\text{B}} \\ \underline{\Gamma\text{AB}} \\ \underline{\text{B}\Gamma\text{A}} \\ \underline{\text{AB}\Gamma 2} \end{array} \begin{pmatrix} \begin{array}{c} \underline{\text{AB}\Gamma} \\ \underline{\text{BA}\Gamma} \\ \underline{\Gamma\text{BA}} \\ \underline{\text{A}\Gamma\text{B}} \\ \underline{\Gamma\text{AB}} \\ \underline{\text{B}\Gamma\text{A}} \\ \underline{\text{AB}\Gamma 2} \end{array} \end{pmatrix} \end{array}$$

Συνεχίζουμε όπως στο ερώτημα 2...

4. Τροποποιούμε το μοντέλος ως εξής. Θέτουμε την πιθανότητα να μεταβούμε από την ΓΑΒ στην ΑΒΓ ίση με 1.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \underline{\text{AB}\Gamma} \\ \underline{\text{BA}\Gamma} \\ \underline{\Gamma\text{BA}} \\ \underline{\text{A}\Gamma\text{B}} \\ \underline{\Gamma\text{AB}} \\ \underline{\text{B}\Gamma\text{A}} \end{array} \begin{pmatrix} \begin{array}{c} \underline{\text{AB}\Gamma} \\ \underline{\text{BA}\Gamma} \\ \underline{\Gamma\text{BA}} \\ \underline{\text{A}\Gamma\text{B}} \\ \underline{\Gamma\text{AB}} \\ \underline{\text{B}\Gamma\text{A}} \end{array} \end{pmatrix} \end{array}$$

Επομένως, οι διαδρομές  $\Gamma\text{AB} \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma\text{AB}$  είναι της μορφής  $\Gamma\text{AB} \rightarrow \text{AB}\Gamma \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma\text{AB}$ .

Ας συμβολίσουμε με  $T_{\Gamma\text{AB},\Gamma\text{AB}}$  το μέσο μήκος των διαδρομών  $\Gamma\text{AB} \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma\text{AB}$  και με  $T_{\text{AB}\Gamma,\Gamma\text{AB}}$  το μέσο μήκος των διαδρομών  $\text{AB}\Gamma \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma\text{AB}$ . Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$T_{\Gamma\text{AB},\Gamma\text{AB}} = 1 + T_{\text{AB}\Gamma,\Gamma\text{AB}}.$$

Η  $T_{\Gamma\text{AB},\Gamma\text{AB}}$  όμως μπορεί να υπολογιστεί ερμηνεύοντας την σταθερή κατάσταση του συστήματος ως την συχνότητα επισκέψεων στις καταστάσεις. Προσοχή: Η αλυσίδα είναι απεριοδική και με μία μοναδική κλάση επικοινωνίας, επομένως η σταθερή κατάσταση υπάρχει.

$$T_{\Gamma\text{AB},\Gamma\text{AB}} = \frac{1}{\pi_5},$$

όπου  $\pi$  είναι το διάνυσμα πιθανοτήτων σταθερής κατάστασης.

Επομένως,

$$T_{\text{ABΓ,ΓAB}} = \frac{1}{\pi_5} - 1.$$

Το διάνυσμα  $\pi$  μπορεί να βρεθεί λύνοντας το σύστημα

$$\begin{aligned}\pi &= P\pi \\ \sum_{i=1}^6 \pi(i) &= 1\end{aligned}$$

Πιο αναλυτικά,

$$\begin{aligned}\pi_1 &= r_{12}\pi_2 + r_{13}\pi_3 + r_{23}\pi_4 + \pi_5 \\ \pi_2 &= r_{12}\pi_1 + r_{23}\pi_5 \\ \pi_3 &= r_{13}\pi_3 + r_{12}\pi_6 \\ \pi_4 &= r_{23}\pi_4 + r_{12}\pi_6 \\ \pi_5 &= r_{13}\pi_2 + r_{23}\pi_3 + r_{12}\pi_4 \\ \pi_6 &= r_{23}\pi_2 + r_{12}\pi_3 + r_{13}\pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 &= 1.\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα, βγάζουμε ότι  $\pi_5 = \frac{17}{145}$ .

### Άσκηση 3

Μια μικρή αποθήκη χωράει το πολύ τρεις παλέτες. Κάθε ώρα ένα φορτηγό έρχεται για να μαζέψει τις αποθηκευμένες παλέτες. Ανάλογα με τον διαθέσιμο χώρο του, το μέγιστο πλήθος παλετών που μπορεί να μαζέψει το φορτηγό είναι 0 με πιθανότητα  $p_0 = 0.1$ , 1 με πιθανότητα  $p_1 = 0.2$ , 2 με πιθανότητα  $p_2 = 0.4$  και 3 με πιθανότητα  $p_3 = 0.3$ . Το φορτηγό μαζεύει πάντα όσες παλέτες είναι δυνατόν σύμφωνα με αυτό το περιορισμό. Το πλήθος των παλετών που φτάνουν στην αποθήκη κατά τη διάρκεια μιας ώρας είναι μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές 0 με πιθανότητα  $q_0 = 0.3$ , 1 με πιθανότητα  $q_1 = 0.4$  και 2 με πιθανότητα  $q_2 = 0.3$ . Οι παλέτες που φτάνουν όταν η αποθήκη είναι γεμάτη απορρίπτονται. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι φόρτωσης και εκφόρτωσης των παλετών είναι αμελητέοι.

1. Μοντελοποιήστε το σύστημα μέσω μιας αλυσίδας Μαρκόβ.
2. Στην σταθερή κατάσταση, υπολογίστε τον μέσο αριθμό παλετών στην αποθήκη μετά την αναχώρηση ενός φορτηγού.
3. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο αριθμός των παλετών στην αποθήκη μετά την αναχώρηση ενός φορτηγού είναι δύο για ακριβώς τρεις συνεχόμενες φορές.

### Λύση

1. Στην άσκηση αυτή ο χρόνος διακριτοποιείται σε χρονικά παράθυρα (*time slots*) της 1 ώρας. Εφόσον η φόρτωση/εκφόρτωση των παλετών παίρνει αμελητέο χρόνο, θεωρούμε ότι η πιθανότητα να φτάσουν παλέτες την χρονική στιγμή που το φορτηγό τις φορτώνει είναι 0.

Το μοντέλο μας περιγράφει τον αριθμό των παλετών αμέσως μετά την αναχώρηση του φορτηγού, όπου και ξεκινάει το επόμενο χρονικό παράθυρο. Έτσι πρέπει να μετρήσουμε πόσες παλέτες φτάνουν εντός του παραθύρου και πόσες από αυτές θα πάρει το φορτηγό.<sup>1</sup> Έστω  $X_k$  ο αριθμός των παλετών στο χρονικό παράθυρο  $k$ . Έστω  $q_i$  η πιθανότητα να έρθουν  $i$  παλέτες πριν την άφιξη του φορτηγού και  $p_j$  η πιθανότητα

---

<sup>1</sup>Μία εναλλακτική προσέγγιση θα ήταν να μετράμε τις παλέτες ακριβώς πριν την άφιξη του φορτηγού, δηλαδή ακριβώς στο τέλος του χρονικού παραθύρου. Τότε θα έπρεπε να μετράμε πόσες από τις υπάρχουσες παλέτες θα έπαιρνε το φορτηγό και πόσες θα έφταναν την επόμενη ώρα. Όμως η προσέγγισή που ακολουθήσαμε οφείλεται στα επόμενα ερωτήματα, που βασίζονται στο μοντέλο που περιγράψαμε.

στο φορτηγό να χωράνε  $j$  παλέτες στο φορτηγό. Με δεδομένο ότι τα δύο αυτά ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα, έχουμε

$$\begin{aligned} p_{0,0} &= P(X_{k+1} = 0 \mid X_k = 0) = P((\text{Ήρθαν } 0 \cap \text{Το φορτηγό χωρούσε } 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2 \text{ ή } 3)) \\ &\quad \cup (\text{Ήρθε } 1 \cap \text{Το φορτηγό χωρούσε } 1 \text{ ή } 2 \text{ ή } 3) \\ &\quad \cup (\text{Ήρθαν } 2 \cap \text{Το φορτηγό χωρούσε } 2 \text{ ή } 3)) \\ &= q_0 + q_1(p_1 + p_2 + p_3) + q_2(p_2 + p_3) \\ &= 0.87 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα υπολογίζουμε τις υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης, παίρνοντας υπόψη ότι αν έρθουν περισσότερες από όσες χωράνε, μένουν 3 πριν φτάσει το φορτηγό. Για παράδειγμα, αν υπάρχουν 2 και φτάσουν άλλες 2 και το φορτηγό φορτώσει 2, θα μείνει 1 παλέτα.

$$\begin{aligned} p_{0,0} &= q_0 + q_1(p_1 + p_2 + p_3) + q_2(p_2 + p_3) = 0.87 \\ p_{0,1} &= q_1 p_0 + q_2 p_1 = 0.1 \\ p_{0,2} &= q_2 p_0 = 0.03 \\ p_{0,3} &= 0 \\ p_{1,0} &= q_0(p_1 + p_2 + p_3) + q_1(p_2 + p_3) + q_2 p_3 = 0.64 \\ p_{1,1} &= q_0 p_0 + q_1 p_1 + q_2 p_2 = 0.23 \\ p_{1,2} &= q_1 p_0 + q_2 p_1 = 0.1 \\ p_{1,3} &= q_2 p_0 = 0.03 \\ p_{2,0} &= q_0(p_2 + p_3) + q_1 p_3 + q_2 p_3 = 0.42 \\ p_{2,1} &= q_0 p_1 + q_1 p_2 + q_2 p_2 = 0.34 \\ p_{2,2} &= q_0 p_0 + q_1 p_1 + q_2 p_1 = 0.17 \\ p_{2,3} &= q_1 p_0 + q_2 p_0 = 0.07 \\ p_{3,0} &= p_3 = 0.3 \\ p_{3,1} &= p_2 = 0.4 \\ p_{3,2} &= p_1 = 0.2 \\ p_{3,3} &= p_0 = 0.1 \end{aligned}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & p_{0,3} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,0} & p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

2. Η αλυσίδα είναι απεριοδική και με μία μοναδική κλάση επικοινωνίας, επομένως οι πιθανότητες σταθερής κατάστασης υπάρχουν και μπορούν να υπολογιστούν από το σύστημα

$$\pi = P\pi$$

$$\sum_{i=0}^3 \pi_i = 1$$

Από το οποίο προκύπτει ότι  $\pi \approx [0.8142 \ 0.1307 \ 0.0471 \ 0.0080]$ . Επομένως,

$$E[X] = 0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_2 + 3 \cdot \pi_3 \approx 0.2490$$

3. Το ζητούμενο ενδεχόμενο μπορεί να μεταφραστεί ως: Κάποια στιγμή η αποθήκη περιέχει 2 παλέτες. Συνεχίζει να έχει δύο παλέτες για ακόμη δύο χρονικά παράθυρα, όμως το επόμενο παράθυρο έχει άλλον αριθμό.

$$P(\dots) = \pi_2 \cdot p_{2,2}^2 \cdot (1 - p_{2,2}) \approx 0.00113$$

## Άσκηση 4

Μοντελοποιούμε την κίνηση που παράγει στο δίκτυο ένας χρήστης με μία Μαρκοβιανή στοχαστική διαδικασία  $X(t)$  με σύνολο καταστάσεων  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  Mbps. Η κίνηση που παράγει ο χρήστης λαμβάνει μια νέα τιμή

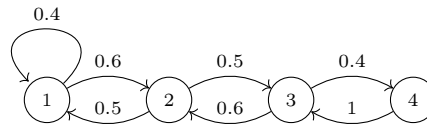
κάθε 1 δευτερόλεπτο, και έχει τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0 \end{bmatrix}$$

1. Σχεδιάστε μια πιθανή πραγματοποίηση της  $X(t)$  με μήκος 10 δευτερόλεπτα.
2. Σχεδιάστε την Μαρκοβιανή αλυσίδα που μοντελοποιεί την  $X(t)$ .
3. Εξηγήστε γιατί η  $X(t)$  είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία. Είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία γεννήσεως-θανάτου;
4. Γράψτε τις γενικές και τις τοπικές εξισώσεις ισορροπίας.
5. Υπολογίστε την κατανομή σταθερής κατάστασης.
6. Υπολογίστε τον μέσο όρο της κίνησης που παράγεται από τον χρήστη, δηλαδή την  $E[X(t)]$ .

## Λύση

1. Μία πιθανή πραγματοποίηση μήκους 10 θα μπορούσε να είναι η 3, 4, 3, 2, 2, 1, 2, 3, 4, 3. Προσέξτε ότι οι μεταβάσεις είναι μεταξύ γειτονικών καταστάσεων, καθώς επίσης όταν επισκεπτόμαστε την 4 μετά πάμε πάντα στην 3.



Σχήμα 1: Η μαρκοβιανή αλυσίδα της Άσκησης 4

- 2.
3. Είναι μία μαρκοβιανή διαδικασία διότι εφόσον ξέρουμε την κατάσταση που βρίσκεται το σύστημα, οι προηγούμενες καταστάσεις δεν αλλάζουν την πιθανότητα να μεταβούμε σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Είναι επίσης μια διαδικασία γεννήσεως-θανάτου διότι οι καταστάσεις μπορούν να διαταχθούν με τέτοιο τρόπο (στην περίπτωσή μας 1 2 3 4), ώστε όλες οι πιθανές μεταβάσεις να συμβαίνουν μεταξύ γειτονικών καταστάσεων.
4. Οι γενικές εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 0.4\pi_1 + 0.5\pi_2 \\ \pi_2 &= 0.6\pi_1 + 0.6\pi_3 \\ \pi_3 &= 0.5\pi_2 + \pi_4 \\ \pi_4 &= 0.4\pi_3\end{aligned}$$

Οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\begin{aligned}0.6\pi_1 &= 0.5\pi_2 \\ 0.5\pi_2 &= 0.6\pi_3 \\ 0.4\pi_3 &= \pi_4\end{aligned}$$

Μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης  $\sum_{i=1}^4 \pi_i = 1$ , το σύστημα μπορεί να λυθεί.

5. Από τις τοπικές εξισώσεις ισορροπίας, ξέρουμε ότι προκύπτουν οι εξισώσεις σταθερής κατάστασης με αναγωγή στην κατάσταση 1. Έχουμε

$$\begin{aligned}\pi_2 &= \frac{0.6}{0.5}\pi_1 = 1.2\pi_1 \\ \pi_3 &= \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.5 \cdot 0.6}\pi_1 = \pi_1 \\ \pi_4 &= \frac{0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4}{0.5 \cdot 0.6 \cdot 1}\pi_1 = 0.4\pi_1\end{aligned}$$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης παίρνουμε ότι

$$\pi_1(1 + 1.2 + 1 + 0.4) = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{3.6}.$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω εξισώσεις,

$$\begin{aligned}\pi_2 &= \frac{1}{3} \\ \pi_3 &= \frac{1}{3.6} \\ \pi_4 &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

6.

$$E[X] = 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_2 + 3 \cdot \pi_3 + 4 \cdot \pi_4 = \frac{20}{9} \text{ Mbps}.$$