

HY-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 24/04/2024

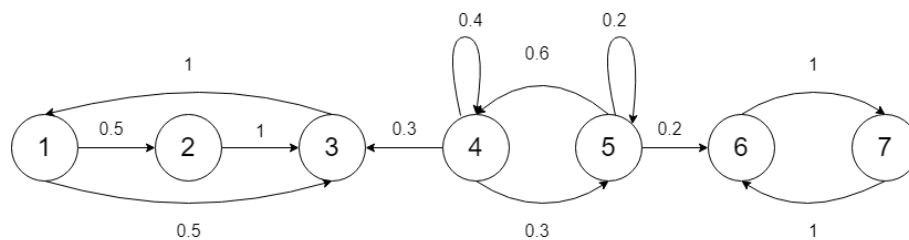
Ημερομηνία Παράδοσης: 17/05/2024

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων. Μπορείτε, αν προτιμάτε, να χρησιμοποιήσετε προγράμματα τύπου Latex ή Word. Για τις προγραμματιστικές ασκήσεις θα πρέπει να παραδώσετε ό,τι ζητείται στην άσκηση.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1.

Έστω η παρακάτω αλυσίδα Markov:



- Αναγνωρίστε τις έμμονες και τις μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας. Για κάθε έμμονη κατάσταση αποφασίστε αν είναι περιοδική (και με ποια περίοδο) ή αperiοδική.
- Προσδιορίστε τις κλάσεις επικοινωνίας και βρείτε ποιες από αυτές είναι περιοδικές.
- Υπάρχουν στατικές πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 1; Εάν ναι, ποιες είναι αυτές;
- Υπάρχουν στατικές πιθανότητες δεδομένου ότι η διαδικασία αρχίζει στην κατάσταση 5; Εάν ναι, ποιες είναι αυτές;
- Υποθέτοντας ότι η διαδικασία αρχίζει από την κατάσταση 4, υπολογίστε τις πιθανότητες απορρόφησης για την κάθε κλάση επικοινωνίας.

- (στ) Ξεκινώντας από την κατάσταση 4, ποιος είναι ο μέσος αριθμός μεταβάσεων μέχρι να φτάσουμε για πρώτη φορά σε μια κλάση επικοινωνίας (συμπεριλαμβανομένης και της μετάβασης στην οποία φτάνουμε στην κλάση);

Άσκηση 2.

Θεωρήστε την Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφεται από τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (α) Σχεδιάστε το γράφημα της Μαρκοβιανής αλυσίδας.
 (β) Δείξτε ότι η στατική κατανομή του συστήματος έχει πάνω από μία λύση.
 (γ) Βρείτε το όριο που συγκλίνει ο πίνακας P^n , καθώς $n \rightarrow \infty$.

Άσκηση 3.

Ένα ρομπότ κινείται τυχαία πάνω σε ένα κυκλικό μονοπάτι με 3 σταθμούς. Κάθε δεδομένη στιγμή t , το ρομπότ αποφασίζει με πιθανότητα p να κινηθεί με τη φορά του ρολογιού στον επόμενο σταθμό, και με πιθανότητα $1 - p$ να κινηθεί αντίθετα από τη φορά του ρολογιού στον επόμενο σταθμό.

- (α) Μοντελοποιήστε την παραπάνω διαδικασία ως μια Μαρκοβιανή αλυσίδα.
 (β) Υπολογίστε τις στατικές πιθανότητες του ρομπότ να βρίσκεται στον κάθε σταθμό.

Έστω $p = \frac{1}{3}$

- (γ) Διαλέγοντας κάποιον αρχικό σταθμό, υπολογίστε τον μέσο αριθμό χρονικών στιγμών t που χρειάζεται το ρομπότ για να επιστρέψει σε αυτόν τον σταθμό.
 (δ) Διαλέγοντας κάποιον αρχικό σταθμό, υπολογίστε την πιθανότητα το ρομπότ να γυρίσει σε αυτόν το πολύ σε 5 χρονικές στιγμές t (δηλ. 5 μεταβάσεις).

Άσκηση 4.

Ο Στέφανος είναι φυλακισμένος και έχει 3 ευρώ. Μπορεί να απελευθερωθεί με εγγύηση αν έχει 8 ευρώ. Ένας φύλακας συμφωνεί να κάνει μια σειρά από στοιχήματα μαζί του. Αν ο Στέφανος στοιχηματίσει A ευρώ, κερδίζει A ευρώ με πιθανότητα 0.4 και χάνει A ευρώ με πιθανότητα 0.6. Βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει 8 ευρώ πριν χάσει όλα τα χρήματά του, αν

- (α) Στοιχηματίζει 1 ευρώ κάθε φορά (συντηρητική στρατηγική)
 (β) Στοιχηματίζει κάθε φορά όσο το δυνατόν περισσότερο, αλλά όχι περισσότερο από ό,τι είναι απαραίτητο για να φτάσει η περιουσία του στα 8 ευρώ (τολμηρή στρατηγική)

Ποια στρατηγική δίνει στον Στέφανο καλύτερες πιθανότητες να βγει από τη φυλακή;

Άσκηση 5.

Κατά τη διάρκεια μιας έρευνας για την αναπαραγωγή των κουνελιών, παρατηρούμε την εξέλιξη ενός συγκεκριμένου γονιδίου που εμφανίζεται σε δύο τύπους, G ή g . Ένα κουνέλι έχει ένα ζευγάρι γονιδίων. GG (κυρίαρχο), Gg (υβριδικό - η σειρά δεν έχει σημασία, έτσι το ζευγάρι gG είναι ίδιο με το Gg) ή gg (υποχωρητικό).

Κατά την αναπαραγωγή δύο κουνελιών, οι απόγονοι κληρονομούν ένα γονίδιο από κάθε γονέα με ίση πιθανότητα. Έτσι, αν αναπαράγουμε ένα κυρίαρχο (GG) με ένα υβριδικό (Gg), το ζευγάρι γονιδίων του απογόνου τους είναι κυρίαρχο με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ ή υβριδικό με πιθανότητα $\frac{1}{2}$.

Στο πείραμά σας, ξεκινάτε με ένα κουνέλι με δεδομένο χαρακτήρα γονιδίων (GG , Gg ή gg) και το αναπαράγετε με ένα κουνέλι με υβριδικό χαρακτήρα γονιδίων. Ο απόγονός τους αναπαράγεται ξανά με ένα υβριδικό, και η διαδικασία επαναλαμβάνεται για έναν αριθμό γενιών, πάντα αναπαράγοντας τον νέο απόγονο με ένα κουνέλι υβριδικού χαρακτήρα γονιδίων.

- (α) Υπολογίστε τις τιμές του πίνακα μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας.
- (β) Υποθέστε τώρα ότι ξεκινάτε το ίδιο πείραμα με ένα κουνέλι υβριδικού χαρακτήρα γονιδίων. Έστω μ_n η κατανομή της πιθανότητας του χαρακτήρα γονιδίων του κουνελιού n -οστής γενιάς (δηλαδή οι $\mu_n(GG)$, $\mu_n(Gg)$, $\mu_n(gg)$ είναι οι πιθανότητες το κουνέλι n -οστής γενιάς να είναι GG , Gg , gg , αντίστοιχα). Υπολογίστε τις πιθανότητες μ_1, μ_2, μ_3 για κάθε χαρακτήρα γονιδίων. Μπορείτε να δώσετε μια γενικευμένη εκτίμηση για το μ_n ;

Άσκηση 6.

Υλοποιήστε την Μαρκοβιανή αλυσίδα της Άσκησης 4 προγραμματιστικά, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους θεωρητικούς τύπους, καθώς και έτοιμες συναρτήσεις, βιβλιοθήκες και toolboxes που αφορούν Μαρκοβιανές αλυσίδες. Απαντήστε στα ερωτήματα (α) και (β) πειραματικά, και συγκρίνετε τα αποτελέσματα των πειραμάτων σας με τις θεωρητικές τιμές που έχετε ήδη υπολογίσει. Ενδεικτικά βήματα είναι τα εξής:

- Ορίστε μια μεταβλητή P ως τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης της αλυσίδας Markov.
- Προσομοιώστε για έναν επαρκή αριθμό από φορές (1000 προσομοιώσεις είναι αρκετές) την Μαρκοβιανή αλυσίδα που έχετε ορίσει. Κάθε προσομοίωση ξεκινά από την αρχική κατάσταση 3 (3 ευρώ) και ολοκληρώνεται όταν ο Στέφανος κερδίσει 8 ευρώ ή χάσει όλα του τα χρήματα. Hint: Με τη χρήση της συνάρτησης `rand` μπορείτε να μοντελοποιήσετε την τυχαιότητα μετάβασης από μια κατάσταση s_t σε μία κατάσταση s_{t+1} . Συνδυάζοντας καταλλήλα τις συναρτήσεις `find`, `cumsum`, τη σωστή, κάθε φορά, γραμμή του πίνακα P και το αποτέλεσμα της `rand` θα μπορείτε να αποφανθείτε ποια θα είναι η εκάστοτε κατάσταση s_{t+1} σε κάθε βήμα της προσομοίωσής σας.
- Αξιοποιώντας τη μέθοδο της σχετικής συχνότητας (εκ των υστέρων ορισμός πιθανότητας) υπολογίστε πειραματικά την πιθανότητα να βγει ο Στέφανος από τη φυλακή, στο σύνολο των 1000 προσομοιώσεων για την κάθε στρατηγική.
- Υπολογίστε για κάθε προσομοίωση το πλήθος των μεταβάσεων μέχρι να υπάρξει απορρόφηση. Αφού ολοκληρώσετε τις 1000 προσομοιώσεις υπολογίστε τον μέσο όρο των μεταβάσεων και άρα το μέσο αριθμό προσπαθειών που κάνει ο Στέφανος στο παιχνίδι.