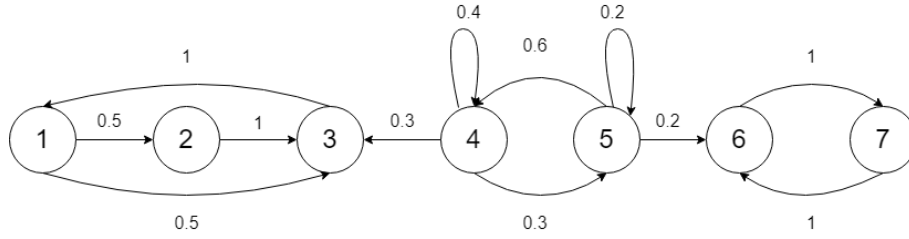


Ενδεικτικές Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.



- (α) Οι καταστάσεις 4,5 είναι μεταβατικές, ενώ οι υπόλοιπες είναι έμμονες. Οι καταστάσεις 1,2,3 είναι απεριοδικές, ενώ οι 6,7 είναι περιοδικές με περίοδο 2.
- (β) Η κλάση επικοινωνίας $\{1, 2, 3\}$ είναι απεριοδική, ενώ η κλάση $\{6, 7\}$ είναι περιοδική.
- (γ) Αν η διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση 1, μένει μέσα στην απεριοδική κλάση $\{1, 2, 3\}$ και οι πιθανότητες n -οστής μετάβασης συγκλίνουν στις στατικές πιθανότητες π_i . Για $i \notin \{1, 2, 3\}$, έχουμε $\pi_i = 0$. Λύνοντας για τις τοπικές εξισώσεις ισορροπίας όπου $i \in \{1, 2, 3\}$, έχουμε

$$\pi = \pi P \Leftrightarrow$$
$$[\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\pi_1 = \pi_3 \quad , \quad \pi_3 = 2\pi_2.$$

Έτσι, δεδομένου ότι $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$,

$$\pi = [0.4 \ 0.2 \ 0.4]$$

- (δ) Ξεκινώντας από την μεταβατική κατάσταση 5, οι στατικές πιθανότητες θα υπάρχουν μόνο για την απεριοδική κλάση (και θα είναι ίδιες με αυτές που υπολογίσαμε παραπάνω), καθώς για την περιοδική κλάση $\{6, 7\}$ δεν μπορούν να υπάρξουν λόγω περιοδικότητας.
- (ε) Έστω α_4 και α_5 οι πιθανότητες απορρόφησης από την κλάση $\{1, 2, 3\}$, ξεκινώντας από την κατάσταση 4 και 5 αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\alpha_4 = 0.3 + 0.4\alpha_4 + 0.3\alpha_5$$
$$\alpha_5 = 0.2\alpha_5 + 0.6\alpha_4 \Rightarrow \alpha_5 = \frac{3}{4}\alpha_4$$

Άρα:

$$\alpha_4 = 0.3 + 0.4\alpha_4 + 0.3 \cdot \frac{3}{4}\alpha_4 \Rightarrow \alpha_4 = 0.8$$

Για την πιθανότητα απορρόφησης από την κλάση $\{6, 7\}$ ξεκινώντας από την κατάσταση 4, θα έχουμε $\alpha'_4 = 1 - 0.8 = 0.2$.

(στ) Έστω μ_4 και μ_5 οι αναμενόμενοι χρόνοι μέχρι να φτάσουμε σε μια κλάση επικοινωνίας, ξεκινώντας από την κατάσταση 4 και 5 αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\mu_4 = 1 + 0.4\mu_4 + 0.3\mu_5$$

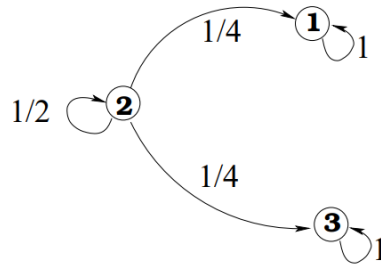
$$\mu_5 = 1 + 0.2\mu_5 + 0.6\mu_4$$

Λύνοντας ως προς το μ_4 , παίρνουμε

$$\mu_4 = \frac{55}{15} = \frac{11}{3} \approx 3.67.$$

Άσκηση 2.

(α) Το ζητούμενο γράφημα:



(β) Από τις εξισώσεις ισορροπίας έχουμε:

$$\begin{aligned} \pi P &= \pi \Leftrightarrow \\ [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] \Rightarrow \\ \begin{cases} \pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_2 \\ \frac{1}{4}\pi_2 + \pi_3 = \pi_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις βλέπουμε ότι $\pi_2 = 0$, ενώ όλες οι λύσεις του συστήματος καταλήγουν σε ταυτοτικές σχέσεις. Δεδομένου ότι $\sum \pi_i = 1$, έχουμε

$$\pi_1 + \pi_3 = 1.$$

Συνεπώς, μπορούμε να δώσουμε οποιαδήποτε τιμή μεταξύ 0 και 1 στο π_1 , π.χ. $\pi_1 = p$, και έτσι $\pi_3 = 1 - p$.

Έτσι,

$$\pi = [p \quad 0 \quad 1-p], \quad p \in [0,1].$$

(γ) Παρατηρούμε ότι η καταστάσεις 1 και 3 είναι απορροφητικές, επομένως

$$\begin{aligned} P_1(X_n = 1) &= 1, \quad P_1(X_n = 2) = 0, \quad P_1(X_n = 3) = 0 \\ P_3(X_n = 1) &= 0, \quad P_3(X_n = 2) = 0, \quad P_3(X_n = 3) = 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς, γνωρίζουμε ήδη την 1η και 3η γραμμή του πίνακα P^n ,

$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_{2,1}^{(n)} & p_{2,2}^{(n)} & p_{2,3}^{(n)} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές που λείπουν, λύνουμε

$$P_2(X_n = 2) = P_2(\text{Μένουμε στη 2 για } n \text{ βήματα}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned} P_2(X_n = 1) &= \sum_{m=1}^n P_2(X_{m-1} = 2, X_m = 1) \\ &= \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1 - 0.5^n}{2} \end{aligned}$$

$$P_2(X_n = 3) = 1 - P_2(X_n = 2) - P_2(X_n = 1) = \frac{1 - 0.5^n}{2}.$$

Έτσι,

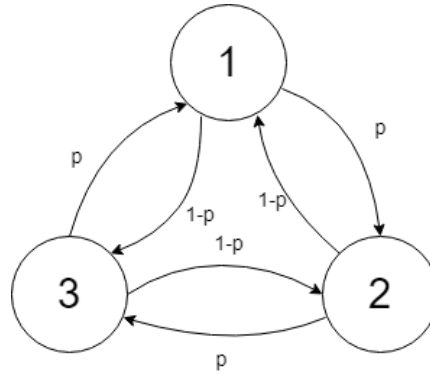
$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1-0.5^n}{2} & 0.5^n & \frac{1-0.5^n}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Όμως, αφού $0.5^n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$,

$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{καθώς } n \rightarrow \infty.$$

Άσκηση 3.

- (α) Το γράφημα της Μαρκοβιανής αλυσίδας, με καταστάσεις $\{1, 2, 3\}$:
Ο αντίστοιχος πίνακας μεταβάσεων:



$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{bmatrix}$$

- (β) Η αλυσίδα Μαρκόβ είναι αperiοδική για $p \in (0, 1)$, επομένως οι στατικές πιθανότητες υπάρχουν. Έχουμε

$$\pi = \pi P \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] &= [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] \begin{bmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] &= [(1-p)\pi_2 + p\pi_3 \quad p\pi_1 + (1-p)\pi_3 \quad (1-p)\pi_1 + p\pi_2]. \end{aligned}$$

Επομένως, το σύστημα που πρέπει να λύσουμε είναι

$$\begin{cases} \pi_1 = (1-p)\pi_2 + p\pi_3 \\ \pi_2 = (1-p)\pi_3 + p\pi_1 \\ \pi_3 = (1-p)\pi_1 + p\pi_2 \end{cases}$$

, δεδομένου ότι

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$

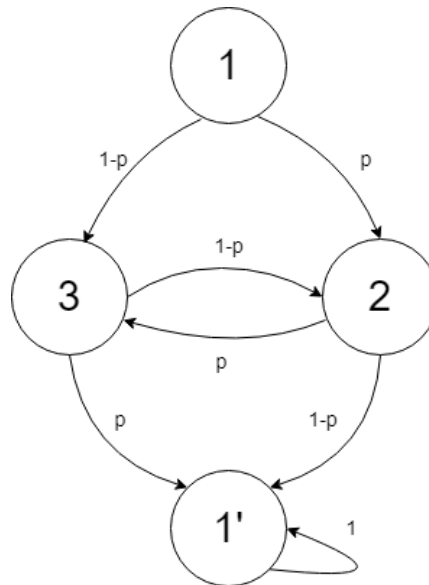
Άρα, προσθέτοντας κατά μέλη και αντικαθιστώντας το άθροισμα $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3$ με 1, βρίσκουμε ότι

$$\pi = \left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right].$$

- (γ) Έστω ότι ο αρχικός σταθμός είναι ο 1 (χωρίς βλάβη γενικότητας).

$$M_1 = E[T_{1,1}] = \frac{1}{\pi_1} = 3$$

- (δ) Έστω ότι ο αρχικός σταθμός είναι ο 1 (χωρίς βλάβη γενικότητας). Θα τροποποιήσουμε το διάγραμμα της Μαρκοβιανής αλυσίδας, προσθέτοντας μια απορροφητική κατάσταση $\{1'\}$. Έτσι,



ο νέος πίνακας μεταβάσεων θα είναι

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, με $p = \frac{1}{3}$. Ακόμα,

$$\begin{aligned} \pi(t) &= [P(X(t) = 1) \ P(X(t) = 2) \ P(X(t) = 3) \ P(X(t) = 1')] \\ \pi(0) &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

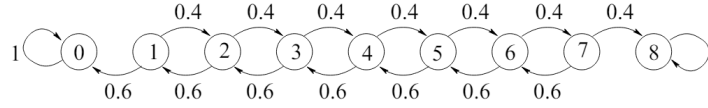
, άρα η ζητούμενη απάντηση είναι $P(X(5) = 1')$.

$$\pi(5) = \pi(0)P^5 = \dots = [0 \ \frac{4}{243} \ \frac{8}{243} \ \frac{77}{81}]$$

Επομένως $P(X(5) = 1') = \frac{77}{81} \approx 0.95$

Άσκηση 4.

(α) Η αλυσίδα Μαρκόβ για τη δεδομένη στρατηγική, θα έχει μορφή:



Έστω $\phi(i)$ η πιθανότητα η αλυσίδα να φτάσει την κατάσταση 8 πριν φτάσει την κατάσταση 0, ξεκινώντας από την κατάσταση i . Τότε έχουμε

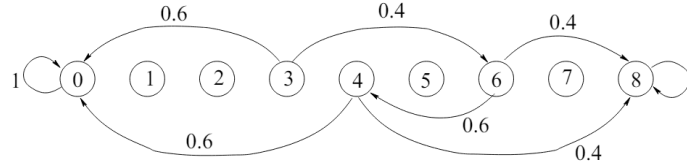
$$\begin{aligned}\phi(i) &= 0.4\phi(i+1) + 0.6\phi(i-1), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(8) &= 1.\end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων, βρίσκουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned}\phi &= (\phi(1), \phi(2), \phi(3), \phi(4), \phi(5), \phi(6), \phi(7)) \\ &= (0.0203, 0.0508, 0.0964, 0.1649, 0.2677, 0.4219, 0.6531, 1).\end{aligned}$$

Άρα, η πιθανότητα να φτάσουμε στην κατάσταση 8 προτού χάσουμε όλα τα λεφτά μας, ξεκινώντας από την κατάσταση 3 (3 ευρώ), είναι $\phi(3) = 0.0964$.

(β) Η αλυσίδα Μαρκόβ για την τολμηρή στρατηγική, θα έχει μορφή:



Οι αντίστοιχες εξισώσεις θα είναι:

$$\begin{aligned}\phi(3) &= 0.4\phi(6) \\ \phi(6) &= 0.4\phi(8) + 0.6\phi(4) \\ \phi(4) &= 0.4\phi(8) \\ \phi(8) &= 1 \\ \phi(0) &= 0\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε ότι

$$\phi(3) = 0.256, \quad \phi(4) = 0.4, \quad \phi(6) = 0.64.$$

Άρα, η πιθανότητα να κερδίσουμε, ξεκινώντας με 3 ευρώ, είναι $\phi(3) = 0.256$

Επομένως, η καλύτερη στρατηγική για το δεδομένο πρόβλημα είναι η τολμηρή.

Άσκηση 5.

- (α) Για το πρόβλημα έχουμε τις εξής δυνατές καταστάσεις $S = \{GG, Gg, gg\}$, με πιθανότητες μετάσβασης:

	GG	Gg	gg
GG	0.5	0.5	0
Gg	0.25	0.5	0.25
gg	0	0.5	0.5

Άρα, για τον πίνακα μετάσβασης:

$$P = 2^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (β) Η 2η γραμμή του πίνακα P^n θα μας δώσει τις τιμές των πιθανοτήτων να λάβουμε από ένα κουνέλι υβριδικού χαρακτήρα γονιδίων, γενιάς $(n-1)$, απογόνους με κυρίαρχο, υβριδικό ή υποχωρητικό χαρακτήρα γονιδίων, αντίστοιχα. Έτσι, για τα μ_1, μ_2, μ_3 , πρέπει να υπολογίσουμε:

$$P^2 = 2^{-2} \begin{bmatrix} 1.5 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0.5 & 2 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = 2^{-3} \begin{bmatrix} 2.5 & 4 & 1.5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1.5 & 4 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = 2^{-4} \begin{bmatrix} 4.5 & 8 & 3.5 \\ 4 & 8 & 4 \\ 3.5 & 8 & 4.5 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mu_i(GG) = 0.25, \mu_i(Gg) = 0.5, \mu_i(gg) = 0.25, i = 1, 2, 3.$$

Στην πραγματικότητα, οι πιθανότητες αυτές είναι ίδιες για οποιοδήποτε $i \in \mathbb{N}$. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή (σε ένα γενικότερο πλαίσιο) ως Hardy-Weinberg law ή Hardy-Weinberg equilibrium. Μπορεί να δείξει κανείς ότι

$$P^n = 2^{-n} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + (2^{n-2} - 1) & 2^{n-1} & \frac{1}{2} + (2^{n-2} - 1) \\ 2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-2} \\ \frac{1}{2} + (2^{n-2} - 1) & 2^{n-1} & \frac{3}{2} + (2^{n-2} - 1) \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 6.

Ενδεικτικός κώδικας σε Python διαθέσιμος σαν notebook στο Google Colab εδώ. Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα συνάδουν με τις θεωρητικές τιμές που υπολογίσαμε νωρίτερα.