

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
4 Ιουνίου 2024 - Διάρκεια: 2.5 Ωρες

Θέμα 1 - 50 μονάδες.

Οι πιθανότητες μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας επτά καταστάσεων είναι:

$$p_{ij} = \begin{cases} 0.5 & (i, j) = (3, 2), (3, 4), (5, 6), (5, 7) \\ 1 & (i, j) = (1, 3), (2, 1), (4, 5), (6, 7), (7, 5) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Στα επόμενα, ο συμβολισμός X_n δηλώνει την κατάσταση της αλυσίδας τη χρονική στιγμή n .

(α) Δώστε το γράφημα αυτής της αλυσίδας.

(β) Για ποιες τιμές του n είναι θετική η πιθανότητα μετάβασης n -στής τάξης $r_{15}(n) = P(X_n = 5 \mid X_0 = 1) > 0$;

(γ) Να γράψετε τα σύνολα $A(i)$ που περιέχουν τις καταστάσεις οι οποίες είναι προσβάσιμες (επι-σκέψιμες) από τις καταστάσεις i , όπου $i = 1, \dots, 7$.

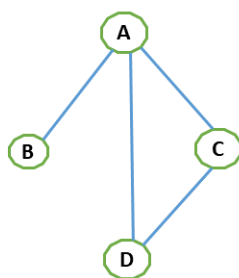
(δ) Ποιες είναι οι έμμονες και οι μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας; Υπάρχει κάποια κλάση επικοινωνίας; Αν ναι, υπολογίστε τις οριακές (στατικές) πιθανότητες λύνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας.

(ε) Ποιος ο μέσος χρόνος απορροφήσεως του συστήματος όταν ξεκινά από την κατάσταση 1;

(στ) Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος μεταβάσεων (ακμών στον γράφο) που πρέπει να προστεθούν στην αλυσίδα, ώστε και οι επτά καταστάσεις να σχηματίσουν μία κλάση επικοινωνίας; Δώστε ένα παράδειγμα.

Θέμα 2 - 50 μονάδες.

Θεωρήστε ένα στοιχειώδη Παγκόσμιο Ιστό (WWW) από 4 σελίδες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Μία ακμή μεταξύ δύο σελίδων, ας πούμε A και B , αντιπροσωπεύει ότι είτε η σελίδα A έχει έναν σύνδεσμο προς την σελίδα B είτε η B έχει έναν σύνδεσμο προς την A . Για να σχεδιάσουμε έναν καλό μηχανισμό αναζήτησης (π.χ. Google), χρειαζόμαστε να κατατάξουμε αυτές τις σελίδες. Φυσικά, μια σελίδα θα πρέπει να κατατάσσεται ψηλότερα αν είναι συνδεδεμένη με περισσότερες σελίδες (όπως οι δημοφιλείς άνθρωποι). Συγκεκριμένα, δεδομένων 100 μονάδων συνολικής φήμης, θέλουμε να κατανείμουμε αυτές τις 100 μονάδες σε όλους τους κόμβους έτσι ώστε η μερίδα ενός κόμβου να είναι ανάλογη με τον αριθμό των άλλων κόμβων με τους οποίους είναι συνδεδεμένος. Στην περίπτωση του παραδείγματος που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1, στους κόμβους A , B , C και D θα πρέπει να αποδοθεί φήμη 37.5, 12.5, 25 και 25, αντίστοιχα.



Σχήμα 1: This is a toy WWW

Ο BrinPage, λάτρης των αλυσίδων Markov, προτείνει την ακόλουθη προσέγγιση. Σχεδιάστε μια αλυσίδα Markov στο δικτυακό γράφο με τις εξής πιθανότητες μετάβασης από τον κόμβο i στον j για κάθε $i, j \in \{A, B, C, D\}$:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{αν } i = j \\ \frac{1}{2d_i} & \text{αν } i \neq j \text{ και οι } j, i \text{ συνδέονται} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Στην παραπάνω έκφραση, d_i είναι ο αριθμός των άλλων σελίδων με τις οποίες συνδέεται η σελίδα i . Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1, $d_A = 3$.

(α) Δώστε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης καθώς και το γράφημα αυτής της αλυσίδας με όλες τις πιθανότητες μετάβασης σαφώς αποτυπωμένες.

(β) Ο BrinPage πιστεύει ότι αυτή η αλυσίδα έχει στατική κατανομή. Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας και υπολογίστε τη στατική κατανομή της αλυσίδας.

Ο BrinPage πιστεύει τόσο έντονα στο μοντέλο Markov των ιστοσελίδων που ζει τη ζωή του με βάση αυτό! Κάθε μέρα παίρνει μία απόφαση να παραμείνει στην τρέχουσα σελίδα ή να μεταβεί σε μια συνδεδεμένη σελίδα σύμφωνα με τις πιθανότητες μετάβασης που ορίσαμε παραπάνω.

(γ) Υποθέτουμε ότι ο BrinPage ξεκινά από τη σελίδα B . Έστω T ο αριθμός των ημερών μέχρι την πρώτη φορά που επισκέπτεται τη σελίδα A . Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. T ;

(δ) Υποθέτοντας και πάλι ότι ο BrinPage ξεκινά από τη σελίδα B , ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος ημερών μέχρι να φτάσει στη σελίδα D για πρώτη φορά;

(ε) Υποθέτοντας ότι ο BrinPage ξεκινά από τη σελίδα D , ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος ημερών μέχρι να επανέλθει στη σελίδα D ;