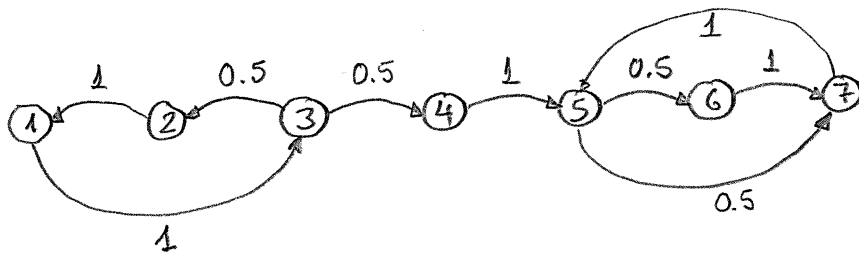


ΘΕΜΑ 1

(α) Το γράφημα αυτής της αλυσίδας είναι:



(β) Η κατάσταση 5 είναι προσβάσιμη από την 1 με ταχύτεστον τρεις μεταβάσεις ($1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$). Άλλες διαδρομές από την κατάσταση 1 στην 5 περιλαμβάνουν επίσης μονοπάτια με έναν βρόχο από την 1 πίσω στην 1 (μήκος 3) και/ή έναν βρόχο από την 5 πίσω στην 5 μέσω της 7, μήκος 2 ($5 \rightarrow 7 \rightarrow 5$) ή 3 ($5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 5$).

Συνεπώς, τα μήκη των δυνατών διαδρομών από την 1 στην 5 είναι $3 + 2m + 3n$ για $m, n \geq 0$. Επομένως, $f_{15}(n) > 0$ για $n=3$ ή $n \geq 5$.

(γ) Από το γράφημα έχουμε ότι:

$A(1) = A(2) = A(3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, δηλαδή από τις καταστάσεις 1, 2, 3 όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας είναι προσβάσιμες.
 $A(4) = \{5, 6, 7\}$, $A(5) = \{5, 6, 7\} = A(6) = A(7)$.

(δ) Οι καταστάσεις 1, 2, 3, 4 είναι μεταβατικές: Όταν το σύστημα φύγει από την 4 δεν μπορεί να επιστρέψει ποτέ σε κάποια από τις 1, 2, 3, 4. Οι καταστάσεις 5, 6, 7 είναι έφθονες και αποσπασίμες, μία κλάση επικοινωνίας τη περιοδική. Για αυτή την κλάση, οι εξισώσεις ισορροπίας διαμορφώνονται ως εξής: $\underline{\pi} = \underline{\pi} \cdot \underline{P} \Rightarrow$

$$[\pi_5 \ \pi_6 \ \pi_7] = [\pi_5 \ \pi_6 \ \pi_7] \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \pi_5 &= \pi_7 \\ \pi_6 &= 0.5\pi_5 \\ \pi_7 &= 0.5\pi_5 + \pi_6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \pi_7 &= \pi_5 \\ \pi_6 &= 0.5\pi_5 \end{aligned}$$

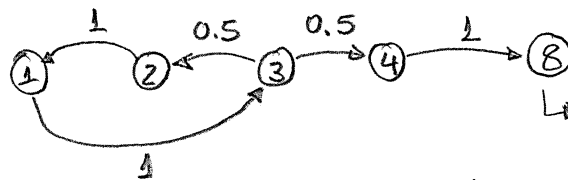
Μαζί με την εξ. κανονικοποίησης, $\pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 1$, παίρνουμε:

$$\pi_5 + 0.5\pi_5 + \pi_5 = 1 \Rightarrow 2.5\pi_5 = 1 \Rightarrow \pi_5 = 0.4$$

(2)

$$\therefore [\pi_5 \ \pi_6 \ \pi_7] = [0.4 \ 0.2 \ 0.4]$$

(Ε) Προφανώς, όταν μιλάμε για απορρόφηση αυτού του συστήματος εννοούμε από την κλάση επικοινωνίας $\{5, 6, 7\}$. Συνεπώς, θεωρούμε την παρακάτω ισοδύναμη αλυσίδα:



↳ απορροφητική κατάσταση.

Λύνουμε το σύστημα για τους μέσους χρόνους απορρόφησης, μ_i , από την κατάσταση 8 όταν ξεκινάμε από την i :

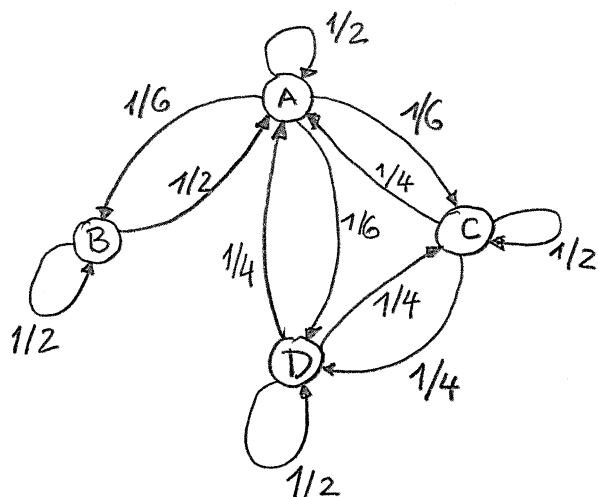
$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + 1 \cdot \mu_3 \\ \mu_2 &= 1 + 1 \cdot \mu_1 \\ \mu_3 &= 1 + 0.5\mu_2 + 0.5\mu_4 \Rightarrow \mu_3 = 1.5 + 0.5\mu_2 \\ \mu_4 &= 1 + 1\mu_8 \Rightarrow \underline{\mu_4 = 1} \\ \mu_8 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\} \Rightarrow \mu_2 = 2 + \mu_3 \\ &\} \Rightarrow \begin{aligned} \underline{\mu_2} &= 7 \\ \underline{\mu_3} &= 5 \\ \underline{\mu_1} &= 6 \end{aligned} \end{aligned} \right\}$$

Συνεπώς, μέσος χρόνος απορρόφησης όταν ξεκινάμε από την κατάσταση 1 είναι $\mu_1 = 6$.

(δτ) Από το γράφημα είναι προφανές ότι μια αλκή (μετάβαση) από οποιαδήποτε από τις έμμενες καταστάσεις της κλάσης επικοινωνίας $\{5, 6, 7\}$ προς οποιαδήποτε από τις μεταβατικές καταστάσεις 1, 2, 3 αρκεί για να δηλωρηθεί μία κλάση επικοινωνίας και των επτά καταστάσεων της αλυσίδας.

ΘΕΜΑ 2 (α) Από το γράφο του Σχήματος 1 της εκφώνησης καθώς και από την έκφραση για τις πιθανότητες μετάβασης, προκύπτει ότι:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



(β)

$$[\pi_A \pi_B \pi_C \pi_D] = [\pi_A \pi_B \pi_C \pi_D] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_A = \frac{1}{2} \pi_A + \frac{1}{2} \pi_B + \frac{1}{4} \pi_C + \frac{1}{4} \pi_D \quad (1)$$

$$\pi_B = \frac{1}{6} \pi_A + \frac{1}{2} \pi_B \quad (2)$$

$$\pi_C = \frac{1}{6} \pi_A + \frac{1}{2} \pi_C + \frac{1}{4} \pi_D \quad (3)$$

$$\pi_D = \frac{1}{6} \pi_A + \frac{1}{4} \pi_C + \frac{1}{2} \pi_D \quad (4)$$

$$(2) \Rightarrow \pi_B = \frac{1}{3} \pi_A \quad (5)$$

$$(3) - (4) \Rightarrow \pi_C - \pi_D = \frac{1}{4} \pi_C - \frac{1}{4} \pi_D \Rightarrow \pi_D = \pi_C \quad (6)$$

$$(1), (5), (6) \Rightarrow \pi_A = \frac{1}{2} \pi_A + \frac{1}{6} \pi_A + \frac{1}{4} \pi_C + \frac{1}{4} \pi_C \Rightarrow \pi_C = \frac{2}{3} \pi_A \quad (7)$$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης: $\pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D = 1 \Rightarrow$

$$\pi_A + \frac{1}{3} \pi_A + \frac{2}{3} \pi_A + \frac{2}{3} \pi_A = 1 \Rightarrow \pi_A = \frac{3}{8} = 0.375$$

$$\therefore [\pi_A \pi_B \pi_C \pi_D] = \left[\frac{3}{8} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{2}{8} \right]$$

$$= [0.375 \quad 0.125 \quad 0.25 \quad 0.25] \#$$

(δ) Από το γράφημα βλέπουμε ότι $P_{BB} = \frac{1}{2} = P_{BA}$. Επομένως, (4)
 κάθε πρωί ο BrinPage ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα. Αν φέρει
 κεφαλή, παραμένει στην σελίδα Β, αλλιώς μεταφέρεται στην Α.
 Τ: αριθμός προφραδειών έως την πρώτη επιτυχία (δηλαδή
 τη μεταφορά στην Α. Επομένως η τ.μ. Τ ακολουθεί
 Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 1/2$:

$$P_T(t) = (1-p)^{t-1} p = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^t; t=1,2,3,\dots$$

(ε) Ζητάμε το μέσο χρόνο έως την πρώτη επιτυχία στην
 κατάβαση $s=D$ όταν ξεκινάμε στην Β. Από τη θεωρία,
 λύνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$t_D = 0 \quad (1)$$

$$t_A = 1 + \frac{1}{2} t_A + \frac{1}{6} t_B + \frac{1}{6} t_C \quad (2)$$

$$t_B = 1 + \frac{1}{2} t_A + \frac{1}{2} t_B \Rightarrow t_B = 2 + t_A \quad (3)$$

$$t_C = 1 + \frac{1}{4} t_A + \frac{1}{2} t_C \Rightarrow t_C = 2 + \frac{1}{2} t_A \quad (4)$$

$$(2), (3), (4) \Rightarrow t_A = 1 + \frac{1}{2} t_A + \frac{1}{6} (2 + t_A) + \frac{1}{6} (2 + \frac{1}{2} t_A) \Rightarrow t_A = \frac{20}{3} = 6.667$$

$$\boxed{t_B = 8.667} \quad t_C = 5.333 = \frac{16}{3}$$

$= 26/3$

(ε) Ζητάμε το μέσο χρόνο πρώτης επανόδου στην D:

$$t_D^* = 1 + P_{DA} t_A + P_{DB} t_B + P_{DC} t_C + P_{DD} t_D$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \frac{20}{3} + 0 \cdot \frac{26}{3} + \frac{1}{4} \frac{16}{3} + \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$\therefore \boxed{t_D^* = 4}$$