

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 1: Ροπογεννήτριες

Άσκηση 1

Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x), & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

1. Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y .
2. Να εξετάσετε αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.
3. Να βρεθούν:
(α) Η μέση τιμή των τ.μ. X και Y , $E[X]$ και $E[Y]$, αντίστοιχα.
(β) Η διασπορά των τ.μ. X και Y , $var[X]$ και $var[Y]$, αντίστοιχα.

Λύση

1. Η περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ. X :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^1 12xy(1-x)dy = 12x(1-x) \int_0^1 ydy \\ &= 12x(1-x) \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{12x(1-x)}{2} \\ \Rightarrow f_X(x) &= 6x(1-x). \end{aligned}$$

Η περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ. Y :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^1 12xy(1-x)dx = 12y \int_0^1 x(1-x)dx \\ &= 12y \int_0^1 x - x^2 dx = 12y \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 12y \frac{1}{6} \\ &\Rightarrow f_Y(y) = 2y . \end{aligned}$$

2. Για να είναι οι τ.μ. X, Y ανεξάρτητες θα πρέπει

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \forall x, y \in (0,1).$$

Έχουμε ότι

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = 6x(1-x) \cdot 2y = 12xy(1-x) = f_{X,Y}(x,y) \quad \forall x, y \in (0,1).$$

Επομένως, οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

3. (α) Η μέση τιμή της X είναι:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x 6x(1-x) dx = 6 \int_0^1 x^2(1-x) dx \\ &= 6 \int_0^1 x^2 - x^3 dx = 6 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &\Rightarrow E[X] = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Για τη μέση τιμή της τ.μ. Y έχουμε

$$E[Y] = \int_0^1 y f_Y(y) dy = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3} [y^3]_0^1 = \frac{2}{3} .$$

(β) Η διασπορά της X δίδεται ως

$$\text{var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E^2[X]$$

Υπολογίζουμε τη ροπή δεύτερης τάξης $E[X^2]$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_0^1 x^2 \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 6x(1-x) dx = 6 \int_0^1 x^3(1-x) dx \\
&= 6 \int_0^1 x^3 - x^4 dx = 6 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \\
\Rightarrow E[X^2] &= \frac{3}{10} .
\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε

$$var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20} .$$

Αντίστοιχα, για τη διασπορά της Y έχουμε,

$$\begin{aligned}
E[Y^2] &= \int_0^1 y^2 \cdot f_Y(y) dy = \int_0^1 y^2 \cdot 2y dy = \int_0^1 2y^3 dy \\
&= 2 \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{4} \\
\Rightarrow E[Y^2] &= \frac{1}{2} .
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$var(Y) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} .$$

Άσκηση 2

Μας δίδεται η διακριτή τ.μ. X για την οποία ισχύει ότι:

$$M_X(s) = a + b \cdot e^{2s} + c \cdot e^{4s}, \quad E[X] = 3, \quad var(X) = 2 .$$

Υπολογίστε τις σταθερές a, b, c καθώς και τη σ.π.π. της τ.μ. X .

Λύση

Έχουμε τρεις άγνωστες σταθερές και τρεις εξισώσεις, τις οποίες αξιοποιούμε ως εξής:

- Η ροπογεννήτρια για $s = 0$ ισούται με $E[e^{0 \cdot X}] = E[1] = 1$, άρα:

$$\begin{aligned}
M_X(s) \Big|_{s=0} &= 1 \\
\Rightarrow a + b \cdot e^{2 \cdot 0} + c \cdot e^{4 \cdot 0} &= 1 \\
\Rightarrow a + b + c &= 1 .
\end{aligned}$$

- Γνωρίζουμε ότι η $E[X]$ (η πρώτη ροπή της X), ισούται με την πρώτη παράγωγο της ροπογεννήτριας στο σημείο $s = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}M_X(s)\Big|_{s=0} &= E[X] \\ \Rightarrow \frac{d}{ds}(a + b \cdot e^{2s} + c \cdot e^{4s})\Big|_{s=0} &= 3 \\ \Rightarrow 2b \cdot e^{2s} + 4c \cdot e^{4s}\Big|_{s=0} &= 3 \\ \Rightarrow 2b + 4c &= 3.\end{aligned}$$

- Γνωρίζουμε ότι η δεύτερη ροπή $E[X^2]$ ισούται με την δεύτερη παράγωγο της ροπογεννήτριας στο σημείο $s = 0$:

$$E[X^2] = \text{var}(X) + E^2[X] = 2 + 9 = 11 \quad (1)$$

$$E[X^2] = \frac{d^2}{ds^2}M_X(s)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}(2b \cdot e^{2s} + 4c \cdot e^{4s})\Big|_{s=0} = (4b \cdot e^{2s} + 16c \cdot e^{4s})\Big|_{s=0} = 4b + 16c \quad (2)$$

Από τις (1) και (2), προκύπτει ότι:

$$4b + 16c = 11$$

Λύνοντας λοιπόν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων,

$$\begin{aligned}2b + 4c &= 3 \\ a + b + c &= 1 \\ 4b + 16c &= 11\end{aligned}$$

προκύπτει ότι $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{2}{8}$, $c = \frac{5}{8}$, και επομένως,

$$M_X(s) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} \cdot e^{2s} + \frac{5}{8} \cdot e^{4s}.$$

Για να βρούμε την σ.π.π. της X χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των ροπογεννητριών που λέει ότι είναι μοναδικά αντιστρέψιμες. Έτσι, συγκρίνοντας την $M_X(s)$ με τον γενικό τύπο της ροπογεννήτριας διακριτής τ.μ., έχουμε ότι

$$M_X(s) = \sum_{\mathcal{X}} e^{sx} \cdot p_X(x)$$

$$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} \cdot e^{2s} + \frac{5}{8} \cdot e^{4s} = \sum_{\mathcal{X}} e^{sx} \cdot p_X(x) .$$

Από την μοναδικότητα των ροπογεννητριών, συμπαιρένουμε ότι

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 0 \\ \frac{2}{8}, & x = 2 \\ \frac{5}{8}, & x = 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 3

Η τ.μ. Z έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_Z(s) = \frac{a - 5s}{s^2 - 10s + 24}$$

1. Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς a .
2. Βρείτε τη σ.π.π. της τ.μ. Z .
3. Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[Z]$.
4. Υπολογίστε τη διασπορά $var(Z)$.

Λύση

1. Γνωρίζουμε ότι $M_Z(s) \Big|_{s=0} = 1$. Άρα,

$$\begin{aligned} M_Z(s) \Big|_{s=0} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{a}{24} &= 1 \\ \Rightarrow a &= 24 . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$M_Z(s) = \frac{24 - 5s}{s^2 - 10s + 24}$$

Εδώ, αρχικά αναλύουμε σε απλά κλάσματα:

$$M_Z(s) = \frac{24 - 5s}{s^2 - 10s + 24} = \frac{24 - 5s}{(s - 4)(s - 6)} \triangleq \frac{A}{s - 4} + \frac{B}{s - 6}$$

$$A = (s - 4) \cdot M_Z(s) \Big|_{s=4} = \frac{24 - 5s}{s - 6} \Big|_{s=4} = \frac{24 - 20}{-2} = -2$$

$$B = (s - 6) \cdot M_Z(s) \Big|_{s=6} = \frac{24 - 5s}{s - 4} \Big|_{s=6} = \frac{24 - 30}{2} = -3$$

Άρα

$$M_Z(s) = \frac{-2}{s - 4} + \frac{-3}{s - 6}$$

Παρατηρούμε ότι μοιάζει με άθροισμα ροπογεννητριών εκθετικής τ.μ., όπου ισχύει γενικά ότι $M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$, όπου λ η παράμετρος της εκθετικής κατανομής. Μπορούμε να φέρουμε την $M_Z(s)$ σε ένα μείγμα ροπογεννητριών εκθετικών κατανομών ως εξής:

$$M_Z(s) = \frac{-2}{s - 4} + \frac{-3}{s - 6} = \frac{2}{4 - s} + \frac{3}{6 - s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4 - s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{6 - s}$$

Επομένως, η $M_Z(s)$ είναι ένα μείγμα δύο ροπογεννητριών εκθετικών κατανομών, με παραμέτρους 4 και 6, αντίστοιχα. Επομένως, έχουμε

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}4 \cdot e^{-4z} + \frac{1}{2}6 \cdot e^{-6z}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

2. Α' Τρόπος

$$E[Z] = \frac{d}{ds} M_Z(s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(\frac{2}{4 - s} + \frac{3}{6 - s} \right) \Big|_{s=0} = \frac{2}{(4 - s)^2} + \frac{3}{(6 - s)^2} \Big|_{s=0} = \frac{2}{16} + \frac{3}{36} = \frac{5}{24}.$$

B' Τρόπος

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^{+\infty} z \cdot f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} z \cdot \frac{1}{2} (4 \cdot e^{-4z} + 6 \cdot e^{-6z}) dz \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} z \cdot 4e^{-4z} dz + \int_0^{+\infty} z \cdot 6e^{-6z} dz \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) = \frac{5}{24}, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει είτε υπολογίζοντας αναλυτικά τα ολοκληρώματα, είτε παρατηρώντας ότι αυτά είναι οι μέσες τιμές των εκθετικών κατανομών με παραμέτρους 4 και 6, αντίστοιχα.

3. Α' Τρόπος

$$E[Z^2] = \frac{d^2}{ds^2} M_Z(s) \Big|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{2}{4-s} + \frac{3}{6-s} \right) \Big|_{s=0} = \frac{4}{(4-s)^3} + \frac{6}{(6-s)^3} \Big|_{s=0} = \frac{13}{144}$$

Άρα

$$\text{var}(Z) = E[Z^2] - E^2[Z] = \frac{13}{144} - \left(\frac{5}{24} \right)^2 = \frac{3}{64}.$$

B' Τρόπος

$$\begin{aligned} E[Z^2] &= \int_0^{+\infty} z^2 \cdot f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} z^2 \cdot \frac{1}{2} (4 \cdot e^{-4z} + 6 \cdot e^{-6z}) dz \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} 4z^2 \cdot e^{-4z} dz + \int_0^{+\infty} 6z^2 \cdot e^{-6z} dz \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{4^2} + \frac{2}{6^2} \right) = \frac{13}{144}, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει είτε υπολογίζοντας αναλυτικά τα ολοκληρώματα, είτε παρατηρώντας ότι αυτά είναι οι ροπές δεύτερης τάξης των εκθετικών κατανομών με παραμέτρους 4 και 6, αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, η δεύτερη ροπή της εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ , είναι $E[X^2] = \text{var}(X) + E^2[X] = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$

Άσκηση 4

Έστω οι ανεξάρτητες τ.μ. Y και Z . Η τ.μ. Y είναι εκθετική με παράμετρο $\lambda = 2$. Η τ.μ. Z είναι Poisson με παράμετρο $\lambda = 3$.

1. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $2Z + 3$.
2. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. $Y + Z$.

Λύση

Για την κατανομή Poisson με παράμετρο λ ισχύει ότι $M(s) = e^{\lambda(e^s-1)}$.

Για την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ ισχύει ότι $M(s) = \frac{\lambda}{\lambda-s}$.

1. Για τον γραμμικό συνδυασμό μιας τ.μ., $Y = aX + b$, ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(aX+b)}] = e^{sb} E[e^{saX}] = e^{sb} M_X(sa).$$

Επομένως,

$$M_{2Z+3} = e^{3s} M_Z(2s) = e^{3s} \cdot e^{3(e^{2s}-1)}.$$

2. Για το άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ. $Y = X_1 + \dots + X_n$, ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(X_1 + \dots + X_n)}] = E[e^{s(X_1)}] \times \dots \times E[e^{s(X_n)}] = M_{X_1}(s) \times \dots \times M_{X_n}(s).$$

Επομένως,

$$M_{Y+Z} = M_Y(s) \cdot M_Z(s) = \frac{2}{2-s} \cdot e^{3(e^s-1)}.$$

Άσκηση 5

Το πλήθος των φοιτητών που θα εξεταστούν στην πρόοδο του HY-317 (Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες) μοντελοποιείται ως μια τ.μ. *Poisson* με παράμετρο λ . Ο χρόνος (σε λεπτά) που αφιερώνει ο κάθε φοιτητής για τη λύση του διαγωνίσματος του ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 60 και διασπορά 25. Έστω Y ο συνολικός χρόνος που αφιερώθηκε από όλους τους φοιτητές για τη λύση των διαγωνισμάτων της προόδου του HY-317.

1. Να βρείτε το μετασχηματισμό της τ.μ. Y , $M_Y(s)$
2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της τ.μ. Y .
3. Να υπολογίσετε τη διασπορά της τ.μ. Y .

Λύση

1. Έστω N ο αριθμός των φοιτητών που θα εξεταστούν στην πρόοδο του HY-317. Εφόσον η N είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο λ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός που της αντιστοιχεί δίνεται από την εξής σχέση:

$$M_N(s) = e^{\lambda(e^s-1)}$$

Έστω X_i ο χρόνος που αφιερώνει ο φοιτητής i για να λύσει το διαγώνισμά του. Έστω $M_X(s)$ ο κοινός μετασχηματισμός που αντιστοιχεί στις τ.μ. X_i . Εφόσον κάθε X_i είναι κανονικά κατανεμημένη μέση τιμή 60 και διασπορά 25, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός που της αντιστοιχεί δίνεται από την εξής σχέση:

$$M_X(s) = e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2} + \mu s}$$

Ο μετασχηματισμός $M_Y(s)$ προσδιορίζεται αντικαθιστώντας στην έκφραση του $M_N(s)$ όπου e^s με $M_X(s)$. Έτσι, έχουμε τελικά:

$$M_Y(s) = M_N(s) \Big|_{e^s = M_X(s)} = e^{\lambda(e^s-1)} \Big|_{e^s = M_X(s)} = e^{\lambda(M_X(s)-1)} = e^{\lambda(e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2} + \mu s} - 1)}$$

2. Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη μέση τιμή της τ.μ. Y , ισχύει η σχέση (Wald's equation):

$$E[Y] = E[X]E[N]$$

Εφόσον η N είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο λ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι: $E[N] = \lambda$.

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$E[Y] = \mu \cdot \lambda = 60\lambda$$

3. Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη μέση τιμή της τ.μ. Y , ισχύει η σχέση (Wald's equation):

$$VAR[Y] = VAR[X]E[N] + (E[X])^2VAR[N]$$

Εφόσον η N είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο λ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι: $VAR[N] = \lambda$.

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$VAR[Y] = 25\lambda + (60)^2\lambda = \lambda(3600 + 25) = 3625\lambda$$