

Φροντιστήριο 3

Άσκηση 1

Το αδερφάκι σας παίζει το ίδιο βιντεοπαιχνίδι συνεχώς. Υποθέστε ότι κερδίζει κάθε παιχνίδι με πιθανότητα p , ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα άλλων παιχνιδιών. Τα μεσάνυχτα μπαίνετε στο δωμάτιό του και διαπιστώνετε ότι χάνει το παρόν παιχνίδι. Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των χαμένων παιχνιδιών μεταξύ της πιο πρόσφατης νίκης και της πρώτης μελλοντικής νίκης;

Λύση

Έστω t ο αριθμός του παιχνιδιού όταν μπαίνετε στο δωμάτιο. Έστω M ο αριθμός του πιο πρόσφατου παιχνιδιού που κέρδισε το αδερφάκι σας και έστω N ο αριθμός του πρώτου παιχνιδιού που θα κερδίσει στο μέλλον. Η τυχαία μεταβλητή $X = N - t$ είναι γεωμετρικά κατανομημένη με παράμετρο p . Λόγω συμμετρίας και ανεξαρτησίας των παιχνιδιών, η τυχαία μεταβλητή $Y = t - M$ είναι επίσης γεωμετρικά κατανομημένη με παράμετρο p . Τα παιχνίδια που έχει χάσει μεταξύ της πιο πρόσφατης επιτυχίας και της πρώτης μελλοντικής επιτυχίας είναι όλα μεταξύ M και N . Το πλήθος τους L είναι

$$L = N - M - 1 = X + Y - 1$$

ώστε, η $L + 1$ έχει μία Pascal PMF τάξης 2, δηλ.

$$P(L + 1 = k) = \binom{k-1}{1} p^2 (1-p)^{k-2}.$$

Άρα,

$$p_L(l) = P_L(L = l) = P(L + 1 = l + 1) = \binom{l}{1} p^2 (1-p)^{l-1}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Άσκηση 2

Χρησιμοποιούμε λαμπτήρες για να φωτίσουμε ένα δωμάτιο, ξεκινώντας την στιγμή $t = 0$. Οι λαμπτήρες αντικαθίστανται αμέσως μετά την εξάντληση της διάρκειας ζωής τους. Κάθε νέος λαμπτήρας επιλέγεται ανεξάρτητα, με ίση πιθανότητα μεταξύ ενός λαμπτήρα τύπου A και ενός λαμπτήρα τύπου B. Ο χρόνος ζωής X οποιουδήποτε λαμπτήρα, οποιουδήποτε τύπου, είναι μία τυχαία ανεξάρτητη μεταβλητή.

$$\text{Για τους λαμπτήρες τύπου A: } f_x(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\text{Για τους λαμπτήρες τύπου B: } f_x(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

α') Να βρείτε τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι να καεί ο πρώτος λαμπτήρας.

β') Να βρείτε την πιθανότητα να μην καεί κανένας λαμπτήρας πριν την στιγμή t .

γ') Δεδομένου ότι δεν έχει καεί κανένας λαμπτήρας μέχρι την στιγμή t , ποια είναι η πιθανότητα ο πρώτος λαμπτήρας που χρησιμοποιείται να είναι τύπου A;

δ') Να βρείτε τη διακύμανση του χρόνου μέχρι να καεί ο πρώτος λαμπτήρας.

- ε') Να βρείτε την πιθανότητα η εξάντληση ζωής του 12ου λαμπτήρα να είναι επίσης η 4η εξάντληση ζωής λαμπτήρα τύπου A.

Λύση

- α') Έστω X ο χρόνος μέχρι να καεί ο πρώτος λαμπτήρας.
Έστω A το γεγονός ο πρώτος λαμπτήρας να είναι τύπου A και B το γεγονός ο πρώτος λαμπτήρας να είναι τύπου B.
Οι δύο τύποι λαμπτήρων έχουν ίση πιθανότητα, οπότε:

$$E[X] = E[X|A]P(A) + E[X|B]P(B) = 1 * \frac{1}{2} + \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

- β') Έστω D το γεγονός να μην καεί κανένας λαμπτήρας πριν την στιγμή t . Έχουμε:

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) = \frac{1}{2} \frac{t^0 e^{-t}}{0!} + \frac{1}{2} \frac{(3t)^0 e^{-3t}}{0!} = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t}$$

- γ') Ψάχνουμε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|D)$.

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{2} e^{-t}}{\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t}} = \frac{1}{1 + e^{-2t}}$$

- δ')

$$E[X^2] = E[X^2|A]P(A) + E[X^2|B]P(B)$$

Αρχικά βρίσκουμε το $E[X^2]$. Ισχύει ότι η δεύτερη στιγμή μίας εκθετικής μεταβλητής T με παράμετρο λ είναι $E[T^2] = E[T]^2 + \text{var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$. Άρα,

$$E[X^2] = E[X^2|A]P(A) + E[X^2|B]P(B) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{9}$$

Από το ερώτημα (α) ξέρουμε ότι $E[X] = \frac{2}{3}$. Επομένως:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{10}{9} - \frac{2^2}{3^2} = \frac{2}{3}$$

- ε') Αυτή είναι η πιθανότητα από τις πρώτες 11 λάμπες οι 3 να είναι τύπου A και η 12η να είναι επίσης τύπου A.

$$\binom{11}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \binom{11}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

Άσκηση 3

Μια συννεφιασμένη μέρα ρισκάρετε και παίρνετε το ποδήλατο για να φτάσετε στο Πανεπιστήμιο περπατώντας από Αμμουδάρα. Ένα λεπτό πριν φτάσετε, διαπιστώνετε ότι ξεκινά ένα φιλόβροχο. Υπολογίζετε ότι κάθε δευτερόλεπτο που περνά, σας χτυπάει μια σταγόνα ανεξάρτητα με πιθανότητα 0.5.

- α') Ποια η ΣΜΠ, η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου μέχρι να σας χτυπήσει μια σταγόνα για πρώτη φορά;
β') Κατά μέσο όρο, πόσες σταγόνες θα σας χτυπήσουν ώσπου να φτάσετε στο Πανεπιστήμιο;
γ') Ποια η πιθανότητα να μην σας χτυπήσει καμία σταγόνα τα επόμενα 60 δευτερόλεπτα;
δ') Εφόσον συνέβη το παραπάνω ενδεχόμενο, ποιά είναι η μέση τιμή και η διασπορά το χρόνου μέχρι να σας χτυπήσει η επόμενη σταγόνα;

Λύση

α') Δεδομένου ότι κάθε πτώση είναι ανεξάρτητη από τις άλλες, το χρονικό διάστημα T μεταξύ των επόμενων πτώσεων θα ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο 0.5,

$$p_T(t) = 0.5^{t-1} * 0.5^1 = 0.5^t, t \geq 1,$$

με μέση τιμή $E[T] = 1/0.5 = 2$ και διασπορά $var(T) = (1 - p)/p^2 = 2$.

β') Ο αριθμός των σταγόνων σε 60 δευτερόλεπτα δίνεται από την Διωνυμική ΣΜΠ και η μέση τιμή είναι $60 \cdot 0.5 = 30$.

γ') Από την Διωνυμική ΣΜΠ,

$$p_S(0) = \binom{60}{0} 0.5^0 * 0.5^{60} = 0.5^{60}$$

δ') Δεδομένου ότι η γεωμετρική κατανομή είναι χωρίς μνήμη, ο χρόνος μέχρι να χτυπήσει η επόμενη σταγόνα έχει μέση τιμή και διασπορά όπως η πρώτη σταγόνα, που δίνεται στο ερώτημα (α).

Άσκηση 4

Η Μαρίνα φτάνει στη στάση του λεωφορείου, όμως συνειδητοποιεί ότι αυξήθηκε η τιμή του εισιτηρίου. Αποφασίζει ότι είναι προτιμότερο να δοκιμάσει το ωτοστόπ. Τα διερχόμενα αυτοκίνητα σταματούν σε ωτοστόπ σύμφωνα με μια διαδικασία *Poisson* με ρυθμό $\lambda = 0.1$ ανά λεπτό. Υποθέστε αρχικά ότι οποιοδήποτε αυτοκίνητο σταματήσει, θα μπορέσει να την βοηθήσει.

α') Βρείτε την πιθανότητα ότι η Μαρίνα θα περιμένει για περισσότερο από 20 λεπτά.

β') Βρείτε την πιθανότητα ότι θα περιμένει μεταξύ 10 και 30 λεπτών.

γ') Βρείτε την πιθανότητα ότι περιμένει το πολύ μέχρι 20 λεπτά.

Λύση

α') Αυτή είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει άφιξη στη διαδικασία *Poisson*(λ) για 20 λεπτά, που δίνεται από

$$P_N(0, 20) = e^{-0.1*20} = e^{-2}$$

β') Αυτή είναι η πιθανότητα να μην υπάρξει άφιξη για 10 λεπτά, και να υπάρξει τουλάχιστον μία άφιξη στα επόμενα 20 λεπτά. Λόγω της ιδιότητας της απώλειας μνήμης, αυτά τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα, και έτσι η πιθανότητα δίνεται από

$$P_N(0, 10) * (1 - P_N(0, 20)) = e^{-0.1*10} * (1 - e^{-0.1*20}) = e^{-1} * (1 - e^{-2}) = e^{-1} - e^{-3}$$

γ')) Αυτή είναι η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον μία άφιξη σε 20 λεπτά,

$$1 - P_N(0, 20) = 1 - e^{-2}$$

Άσκηση 5

Από τη στάση του λεωφορείου περνάνε λεωφορεία με προορισμό το Πανεπιστήμιο σε ανεξάρτητα χρονικά διαστήματα που είναι κατανομημένα εκθετικά με μια παράμετρο μ . Στην στάση φτάνουν φοιτητές σύμφωνα με μια στοχαστική διαδικασία *Poisson* με ρυθμό λ /ώρα.

- α') Βρείτε τη ΣΜΠ του αριθμού των αναχωρήσεων των λεωφορείων στη διάρκεια μιας ώρας.
- β') Έστω $Y = A + B$ η τ.μ. που είναι το άθροισμα των αφίξεων των λεωφορείων A και των φοιτητών B μέσα σε μια ώρα. Βρείτε την μέση τιμή $E[Y]$.
- γ') Αν ένας φοιτητής φτάσει στην στάση και δει ότι 3 φοιτητές ήδη περιμένουν, υπολογίστε την δεσμευμένη μέση τιμή του χρόνου μέχρι την άφιξη του επόμενου λεωφορείου.
- δ') Υπολογίστε τη ΣΜΠ του αριθμού των επιβατών σε ένα λεωφορείο.

Λύση

- α') Δεδομένου ότι ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων κατανέμεται εκθετικά, ο αριθμός των αφίξεων είναι *Poisson* τ.μ. με παράμετρο μ ,

$$P_B(k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

- β') Υπάρχει 'άφιξη' εάν φτάσει είτε λεωφορείο είτε φοιτητής. Αυτή είναι μια συγχωνευμένη διαδικασία *Poisson* με παράμετρο $\mu + \lambda$ και επομένως $E[Y] = \mu + \lambda$.
- γ') Το ότι περιμένουν φοιτητές, υπονοεί κάποια πληροφορία για το παρελθόν. Ωστόσο, η εκθετική κατανομή είναι χωρίς μνήμη, και επομένως ο χρόνος μέχρι την άφιξη του επόμενου λεωφορείου κατανέμεται εκθετικά με παράμετρο μ . Η αναμενόμενη τιμή είναι ίση με $\frac{1}{\mu}$.
- δ') Θεωρήστε τη διαδικασία *Poisson* από το ερώτημα (β). Δεδομένου ότι πραγματοποιείται μια άφιξη, είναι λεωφορείο με πιθανότητα $\frac{\mu}{\mu+\lambda}$ και φοιτητής με πιθανότητα $\frac{\lambda}{\mu+\lambda}$. Ο αριθμός των επιβατών σε ένα λεωφορείο είναι ο αριθμός των αφίξεων φοιτητών μέχρι την επόμενη άφιξη του λεωφορείου, ο οποίος κατανέμεται ως

$$P(k) = \left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda} \right)^k \frac{\mu}{\mu + \lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$