

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 4

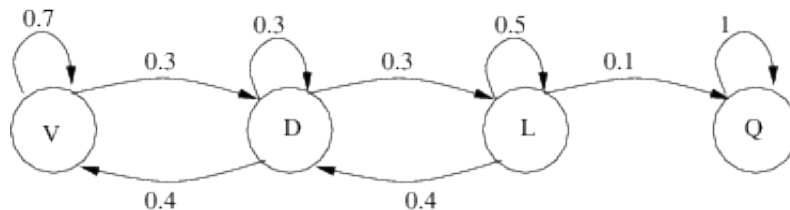
Άσκηση 1

Για μία ομάδα ποδοσφαίρου έχει παρατηρηθεί ότι όταν κερδίζει ένα παιχνίδι, τότε είτε κερδίζει και το επόμενο με πιθανότητα 0.7, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.3. Όταν φέρνει ισοπαλία, τότε είτε κερδίζει το επόμενο παιχνίδι με πιθανότητα 0.4, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.3, είτε χάνει με πιθανότητα 0.3. Τέλος, όταν χάνει ένα παιχνίδι, τότε είτε χάνει και το επόμενο με πιθανότητα 0.5, είτε φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα 0.4, είτε απογοητεύεται τελείως και σταματά να παίζει με πιθανότητα 0.1.

1. Να ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, καθώς και την αλυσίδα *Markov* με το μικρότερο αριθμό καταστάσεων που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη των παιχνιδιών της ομάδας.
2. Να σχεδιάσετε το γράφημα της αλυσίδας.
3. Να προσδιορίσετε τον Πίνακα Πιθανοτήτων Μετάβασης, που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη αλυσίδα Μαρκόβ.
4. Να προσδιορίσετε τις μεταβατικές και έμμονες καταστάσεις της αλυσίδας.
5. Αν το αποτέλεσμα του 1ου παιχνιδιού είναι ισοπαλία, να υπολογίσετε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η ομάδα θα τα παρατήσει και θα σταματήσει να παίζει αμέσως μετά το 3ο παιχνίδι.

Λύση

1. Ορίζουμε τις εξής 4 καταστάσεις: $\{V : \text{νίκη}, D : \text{ισοπαλία}, L : \text{ήττα}, Q : \text{παραίτηση}\}$.
2. Το γράφημα της αλυσίδας φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Το διάγραμμα καταστάσεων για την Άσκηση 3(υ).

3. Με βάση το γράφημα της αλυσίδας του σχήματος 1, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης θα είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. • Η Q είναι έμμονη, διότι η μόνη κατάσταση που είναι προσβάσιμη από αυτήν είναι η Q (ο εαυτός της), η οποία είναι προσβάσιμη από αυτήν.

- Οι καταστάσεις V, D, L δεν είναι προσιτές από την κατάσταση Q , όμως η Q είναι προσβάσιμη από αυτές. Ως εκ τούτου, είναι μεταβατικές. Μόλις το σύστημα μεταβεί στην κατάσταση Q δεν μπορεί να επιστρέψει στις καταστάσεις V, D, L .

5. Έστω X_n η κατάσταση της αλυσίδας *Markov* στο τέλος του n -οστού παιχνιδιού, και έστω το γεγονός:

$$A : \{ \text{Η ομάδα τα παρατάει μετά το 3-ο παιχνίδι} \mid \text{Το 1-ο παιχνίδι είναι ισοπαλία} \}$$

Με χρήση του γραφήματος της αλυσίδας *Markov* στο Σχήμα 1, καθώς και των δεσμευμένων πιθανοτήτων, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X_4 = Q \cap X_3 = L \mid X_1 = D) \\ &= P(X_4 = Q \mid X_3 = L) \cdot P(X_3 = L \mid X_1 = D) \\ &= P_{LQ} \cdot P(X_3 = L \mid X_1 = D) \\ &= P_{LQ} \cdot [P(X_3 = L, X_2 = L \mid X_1 = D) + P(X_3 = L, X_2 = D \mid X_1 = D)] \\ &= P_{LQ} \cdot [P(X_3 = L \mid X_2 = L) \cdot P(X_2 = L \mid X_1 = D) + \\ &\quad P(X_3 = L \mid X_2 = D) \cdot P(X_2 = D \mid X_1 = D)] \\ &= P_{LQ} \cdot (P_{LL} \cdot P_{DL} + P_{DL} \cdot P_{DD} + P_{VL} \cdot P_{DV}) \\ &= 0.1 \cdot (0.5 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.3) = 0.024 \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Μία αλυσίδα *Markov* με 7 καταστάσεις έχει Πιθανότητες Μετάβασης που προσδιορίζονται από τον εξής τύπο:

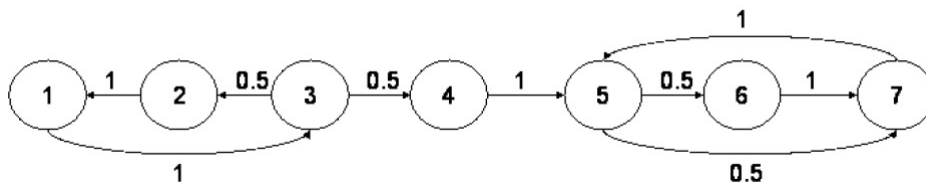
$$p_{i,j} = \begin{cases} 0.5, & (i,j) = (3,2), (3,4), (5,6), (5,7) \\ 1, & (i,j) = (1,3), (2,1), (4,5), (6,7), (7,5) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έστω X_k η κατάσταση της αλυσίδας *Markov* την χρονική στιγμή k .

1. Να σχεδιάσετε το γράφημα της αλυσίδας.
2. Να προσδιορίσετε το σύνολο $A(i)$ των καταστάσεων που είναι προσιτές από την κατάσταση i , για κάθε $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
3. Να προσδιορίσετε τις μεταβατικές και έμμονες καταστάσεις, καθώς και τις κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας. Για κάθε έμμονη κατάσταση, να αποφασίσετε αν είναι περιοδική (και με ποια περίοδο) ή απεριοδική.
4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο αριθμό μεταβάσεων με μη-μηδενική πιθανότητα που πρέπει να προστεθούν στην αλυσίδα, ώστε και οι 7 καταστάσεις να αποτελούν μια μοναδική κλάση επικοινωνίας.

Λύση

1. Το γράφημα της αλυσίδας απεικονίζεται στο Σχήμα 2:



Σχήμα 2: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 2(ι).

2. Από τις καταστάσεις $i = 1, 2, 3$ υπάρχει ένα μονοπάτι μη-μηδενικής πιθανότητας, μέσω της κατάστασης 3, σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Οπότε, για τις εν λόγω καταστάσεις, το σύνολο των προσιτών καταστάσεων θα είναι:

- $i = 1$: $A(1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $i = 2$: $A(2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $i = 3$: $A(3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Από τις καταστάσεις $i = 4, 5, 6, 7$ υπάρχουν μονοπάτια μη-μηδενικής πιθανότητας, μόνο προς τις καταστάσεις 5, 6, 7. Οπότε, για τις εν λόγω καταστάσεις, το σύνολο των προσιτών καταστάσεων θα είναι:

- $i = 4$: $A(4) = \{5, 6, 7\}$
- $i = 5$: $A(5) = \{5, 6, 7\}$
- $i = 6$: $A(6) = \{5, 6, 7\}$
- $i = 7$: $A(7) = \{5, 6, 7\}$

- Οι καταστάσεις 5, 6, 7 είναι έμμονες, διότι μπορούμε να φτάσουμε σε αυτές από οποιαδήποτε κατάσταση που μπορούμε να φτάσουμε από καθεμιά τους.
 - Οι καταστάσεις 1, 2, 3, 4 δεν είναι προσιτές από τις 5, 6, 7, και ως εκ τούτου είναι μεταβατικές. Μόλις το σύστημα μεταβεί σε κάποια από τις καταστάσεις 5, 6, 7 δεν μπορεί να επιστρέψει στις καταστάσεις 1, 2, 3, 4.
 - Οι καταστάσεις 5, 6, 7 σχηματίζουν μια κλάση επικοινωνίας (επικοινωνούν όλες μεταξύ τους, αλλά καμία με τις εξωτερικές καταστάσεις).

Για μια κλάση επικοινωνίας, όλες οι καταστάσεις έχουν την ίδια περίοδο. Επομένως, αρκεί να εξετάσουμε μία από αυτές. Από την κατάσταση 5 το σύστημα επιστρέφει πίσω στην κατάσταση 5 με:

- 2 μεταβάσεις: $(5 \rightarrow 7 \rightarrow 5)$
- 3 μεταβάσεις: $(5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 5)$

Ως εκ τούτου, το σύστημα επιστρέφει στην κατάσταση 5 μετά από n βήματα για οποιοδήποτε $n \geq 2$. Επομένως, η κλάση επικοινωνίας είναι απεριοδική.

Προσοχή: Οι καταστάσεις 1, 2, 3 δεν αποτελούν κλάση επικοινωνίας, διότι οι καταστάσεις σε μια κλάση επικοινωνίας θα πρέπει να είναι έμμονες-και αυτές δεν είναι (π.χ. αν το σύστημα μεταβεί από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 4 δεν υπάρχει επιστροφή).

- Για τη δημιουργία μίας μοναδικής κλάσης επικοινωνίας πρέπει να προστεθεί 1 μετάβαση: Για παράδειγμα, προσθέτοντας μια μετάβαση από την κατάσταση 5 στην κατάσταση 3 θα επιτρέπαμε τη μετάβαση σε κάθε κατάσταση από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση.

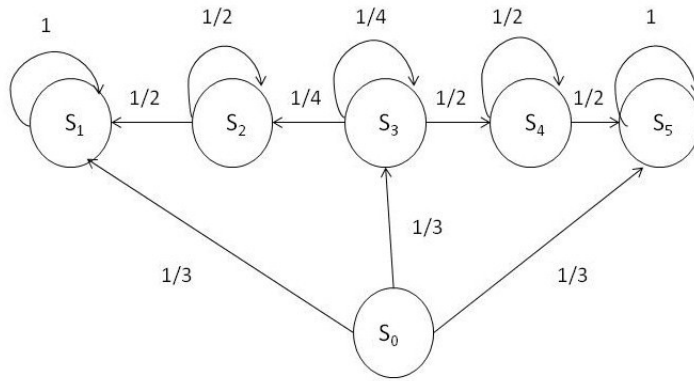
Γενικότερα: Οποιαδήποτε μετάβαση από την κλάση επικοινωνίας των 5, 6, 7 σε κάποια από τις 1, 2, 3 θα πετύχαινε τον ίδιο στόχο.

Άσκηση 3

Μία αλυσίδα Markov με 6 καταστάσεις $\{S_0, S_1, \dots, S_5\}$ περιγράφεται από τον ακόλουθο Πίνακα Πιθανοτήτων Μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Να σχεδιάσετε το γράφημα της αλυσίδας.
- Δεδομένου ότι το σύστημα ξεκινά από την κατάσταση S_0 , να υπολογίσετε την πιθανότητα ότι:
 - Το σύστημα επισκέπτεται την S_2 για πρώτη φορά την χρονική στιγμή k .
 - Το σύστημα επισκέπτεται την S_2 και κατόπιν την εγκαταλείπει αμέσως την επόμενη χρονική στιγμή.
 - Το σύστημα επισκέπτεται την S_1 για πρώτη φορά σε χρόνο $n = 3$.
 - Το σύστημα βρίσκεται στην S_3 αμέσως μετά την n -στή χρονική στιγμή.



Σχήμα 3: Το διάγραμμα καταστάσεων για την άσκηση 1(ι).

Λύση

1. Το γράφημα της αλυσίδας απεικονίζεται στο Σχήμα 3:
2. Δεδομένου ότι το σύστημα ξεκινά από την κατάσταση S_0 , έχουμε:

(α') Έστω το γεγονός:

$$A_k : \{\text{Το σύστημα επισκέπτεται την } S_2 \text{ για πρώτη φορά την χρονική στιγμή } k\}$$

Ο μόνος τρόπος να συμβεί το A_k είναι το σύστημα να επισκεφτεί την S_3 την χρονική στιγμή 0, να μείνει εκεί τις επόμενες $k-2$ χρονικές στιγμές, και τελικά να επισκεφτεί την S_2 την χρονική στιγμή k . Επομένως, για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(A_k) = p_{03} \cdot p_{33}^{k-2} \cdot p_{32} = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}, k = 2, 3, \dots$$

(β') Έστω το γεγονός:

$$B : \{\text{Το σύστημα επισκέπτεται την } S_2 \text{ και την εγκαταλείπει αμέσως την επόμενη χρονική στιγμή}\}$$

Επομένως, για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\{\text{Επίσκεψη στην } S_2\}) \cdot P(\{\text{Εγκατάλειψη της } S_2\} \mid \{\text{Βρίσκεται στην } S_2\}) \\ &= \left[\sum_{k=2}^{\infty} P(A_k) \right] \cdot \frac{1}{2} \\ &= \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \right] \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \right] \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

(γ') Έστω το γεγονός:

$$\Gamma : \{\text{Το σύστημα επισκέπτεται την } S_1 \text{ για 1-η φορά σε χρόνο } n = 3\}$$

Προκειμένου να συμβεί το γεγονός Γ , πρέπει να πραγματοποιηθούν διαδοχικά οι εξής μεταβάσεις:

$$S_0 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$$

Επομένως, για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(\Gamma) = p_{03} \cdot p_{32} \cdot p_{21} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

(δ') Έστω το γεγονός:

Δ : {Το σύστημα βρίσκεται στην S_3 αμέσως μετά τη χρονική στιγμή n }

Προκειμένου να συμβεί το γεγονός Δ , θα πρέπει το σύστημα να επισκεφθεί την S_3 την χρονική στιγμή 1, και να παραμείνει εκεί για τις επόμενες $n - 1$ χρονικές στιγμές.

Επομένως, για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(\Delta) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Άσκηση 4

Στο ταμείο της καφετερίας του Πανεπιστημίου εργάζεται μόνο μία υπάλληλος. Λόγω έλλειψης χώρου, επιτρέπει να σχηματίσουν ουρά μπροστά της μόνο M φοιτητές. Αν φτάνοντας στην ουρά κάποιος φοιτητής βρει μπροστά του M συμφοιτητές του (μαζί με αυτόν που εξυπηρετείται εκείνη τη στιγμή), φεύγει αμέσως. Κάθε λεπτό συμβαίνει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα γεγονότα:

- ένας νέος φοιτητής φτάνει με πιθανότητα p ,
- ένας φοιτητής φεύγει με πιθανότητα kq , όπου k είναι ο αριθμός των φοιτητών στην καφετέρια,
- κανένας νέος φοιτητής δεν φτάνει ούτε υπάρχων φεύγει με πιθανότητα $1 - p - kq$ (αν υπάρχει τουλάχιστον ένας φοιτητής στην καφετέρια) ή με πιθανότητα $1 - p$ (αν δεν υπάρχει).

(α) Αυτό το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω μιας στοχαστικής διαδικασίας γεννήσεως-θανάτου. Ορίστε τις κατάλληλες καταστάσεις και δώστε το γράφημα της αλυσίδας.

(β) Επισκέπτεστε την καφετέρια αφού αυτή είναι ανοιχτή για αρκετό χρόνο. Πόσους πελάτες περιμένετε να βρείτε στην ουρά;

Λύση

- α) Ορίζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, Σχήμα (4), με τόσες καταστάσεις όσους και φοιτητές, δηλαδή $0, 1, \dots, M$. Έστω ότι $Mq < 1$, το γράφημα γίνεται ως εξής:



Σχήμα 4: Η Μαρκοβιανή αλυσίδα της Άσκησης 4.

- β) Για την Μαρκοβιανή αλυσίδα του ερωτήματος α), οι εξισώσεις ισορροπίας είναι,

$$\pi_i = \frac{p^i}{i!q^i} \pi_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M - 1.$$

Όμως, $1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_M$ και επομένως,

$$1 = \pi_0 \sum_{k=0}^M \frac{p^k}{k!q^k}$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^M \frac{p^k}{k!q^k}}$$

Επομένως,

$$\pi_i = \frac{\frac{p^i}{i!q^i}}{\sum_{k=0}^M \frac{p^k}{k!q^k}}.$$

Επομένως, ο μέσος αριθμός των πελατών στην ουρά είναι,

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^M i\pi_i = \sum_{i=1}^M i\pi_i = \frac{\sum_{i=1}^M i \frac{p^i}{i!q^i}}{\sum_{k=0}^M \frac{p^k}{k!q^k}} = \frac{\sum_{i=1}^M \frac{p^i}{(i-1)!q^i}}{\sum_{k=0}^M \frac{p^k}{k!q^k}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{\sum_{i=0}^M \frac{p^i}{i!q^i}}{\sum_{k=0}^M \frac{p^k}{k!q^k}}$$