

Φροντιστήριο 5

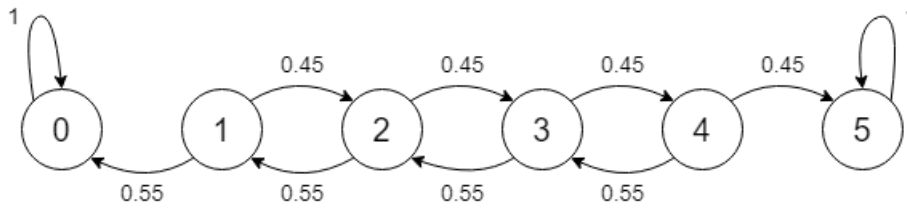
Άσκηση 1.

Η Κατερίνα παίρνει ένα τεστ. Ξεκινάει την εξέταση έχοντας 30 μονάδες (τις οποίες έχει μαζέψει από προηγούμενο στάδιο). Κάθε φορά που απαντά σωστά σε μία ερώτηση (γεγονός που συμβαίνει με πιθανότητα 0.45), κερδίζει 10 μονάδες. Όταν απαντά λάθος (με πιθανότητα 0.55), χάνει 10 μονάδες. Η εξέταση συνεχίζεται μέχρις ότου η Κατερίνα συγκεντρώσει 50 μονάδες ή όταν θα έχει χάσει όλες τις μονάδες της.

- α') Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως την εξέλιξη της εξέτασης της Κατερίνας. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές, και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης. Ποιες από τις καταστάσεις είναι έμμονες και ποιες είναι μεταβατικές;
- β') Με τι πιθανότητα η Κατερίνα θα ολοκληρώσει την εξέταση έχοντας συγκεντρώσει 50 μονάδες; Με τι πιθανότητα θα τελειώσει με 0 μονάδες;
- γ') Πόσο θα διαρκέσει η εξέταση της Κατερίνας; Με άλλα λόγια, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ερωτήσεων που θα απαντήσει μέχρις ότου συγκεντρώσει 50 μονάδες ή χάσει όλες τις μονάδες της;

Λύση:

- α') Ως κατάσταση της διαδικασίας της εξέτασης ορίζουμε τις μονάδες που έχει η Κατερίνα διά 10, δηλαδή $0, 1, \dots, 5 \rightarrow 0, 10, \dots, 50$ μονάδες. Επομένως το γράφημα της αλυσίδας είναι:



Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.55 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.55 & 0 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.55 & 0 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι καταστάσεις 0 και 5 είναι έμμονες και οι υπόλοιπες είναι μεταβατικές.

β') Ζητάμε τις πιθανότητες απορροφήσεως από τις καταστάσεις $s = 5$ και $s = 0$, όταν η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση $i = 3$.

Για $s = 5$,

$$\alpha_0 = 0$$

$$\alpha_5 = 1$$

$$\alpha_1 = p_{10}\alpha_0 + p_{12}\alpha_2 = 0.45\alpha_2$$

$$\alpha_2 = p_{21}\alpha_1 + p_{23}\alpha_3 = 0.55\alpha_1 + 0.45\alpha_3$$

$$\alpha_3 = p_{32}\alpha_2 + p_{34}\alpha_4 = 0.55\alpha_2 + 0.45\alpha_4$$

$$\alpha_4 = p_{43}\alpha_3 + p_{45}\alpha_5 = 0.55\alpha_3 + 0.45 .$$

Από τις εξισώσεις για το α_1 και το α_2 , έχουμε

$$\alpha_2 = 0.55(0.45\alpha_2) + 0.45\alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 = 0.598\alpha_3 .$$

Από τις εξισώσεις για το α_3 και το α_4 , έχουμε

$$\alpha_3 = 0.55\alpha_2 + 0.45(0.55\alpha_3 + 0.45) .$$

Άρα

$$\alpha_3 = 0.55(0.598\alpha_3) + 0.45(0.55\alpha_3 + 0.45) \Rightarrow \alpha_3 = 0.478 .$$

Επομένως, η Κατερίνα συγκεντρώνει 50 μονάδες με πιθανότητα 0.478, ενώ χάνει όλες τις μονάδες της με πιθανότητα 0.522.

γ') Ζητάμε τον μέσο χρόνο απορροφήσεως της αλυσίδας ξεκινώντας από την κατάσταση $i = 3$.

$$\mu_0 = \mu_5 = 0$$

$$\mu_1 = 1 + 0.55\mu_0 + 0.45\mu_2 = 1 + 0.45\mu_2$$

$$\mu_2 = 1 + 0.55\mu_1 + 0.45\mu_3$$

$$\mu_3 = 1 + 0.55\mu_2 + 0.45\mu_4$$

$$\mu_4 = 1 + 0.55\mu_3 + 0.45\mu_5 = 1 + 0.55\mu_3$$

Από τις εξισώσεις για το μ_1 και το μ_2 , έχουμε

$$\mu_2 = 1 + 0.55(1 + 0.45\mu_2) + 0.45\mu_3 \Rightarrow \mu_2 = 2.0598 + 0.598\mu_3 .$$

Από τις εξισώσεις για το μ_3 και το μ_4 , έχουμε

$$\mu_3 = 1 + 0.55\mu_2 + 0.45(1 + 0.55\mu_3) .$$

Άρα

$$\mu_3 = 1 + 0.55(2.0598 + 0.598\mu_3) + 0.45 + 0.45 \cdot 0.55\mu_3 \Rightarrow \mu_3 = 6.0975 .$$

Άσκηση 2.

Στο γκαράζ του Πανεπιστημίου έχει εγκατασταθεί μία μπάρα η οποία λειτουργεί με κάρτες και δυστυχώς κινδυνεύει από το προσωπικό και τους καθηγητές. Συγκεκριμένα, κάθε μέρα ένα αυτοκίνητο προσκρούει στην μπάρα με πιθανότητα p και στην περίπτωση αυτή μία καινούρια μπάρα πρέπει να εγκατασταθεί. Επίσης, μία μπάρα η οποία λειτουργεί για m μέρες αντικαθίσταται από μία νέα για λόγους καλής λειτουργίας.

α') Ορίστε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει πλήρως τη λειτουργία του συστήματος της μπάρας του γκαράζ. Ορίστε επακριβώς τις καταστάσεις, δώστε το γράφημα της αλυσίδας με τις πιθανότητες μετάβασης καθαρά γραμμένες στις ακμές και γράψτε τον αντίστοιχο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

β') Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας και υπολογίστε τη στατική κατανομή της αλυσίδας

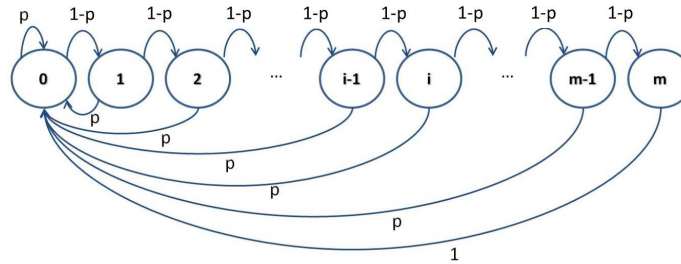
γ') Σε βάθος χρόνου (μακροπρόθεσμα), ποια είναι η συχνότητα με την οποία αντικαθίσταται η μπάρα; Με τι ισούται αυτή η συχνότητα όταν η διάρκεια m της φυσικής ζωής της μπάρας είναι πολύ μεγάλη;

Λύση:

α') Ορίζουμε $m + 1$ καταστάσεις $\{0, 1, 2, \dots, m-1, m\}$ ως εξής:

Κατάσταση i : 'Η μπάρα βρίσκεται σε λειτουργία για i μέρες.' $i = 0, 1, \dots, m$.

Το γράφημα της αλυσίδας δίδεται στο Σχήμα α'):



Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 & \dots & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

β') Συμβολίζοντας με $\underline{\pi} = [\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m]$ το διάνυσμα της στατικής κατανομής των καταστάσεων, οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{cases} \underline{\pi} = \underline{\pi} \cdot P \\ \underline{\pi} \cdot \underline{e} = 1 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 p + \pi_1 p + \dots + \pi_{m-1} p + \pi_m \\ \pi_1 &= \pi_0(1-p) \\ \pi_2 &= \pi_1(1-p) = \pi_0(1-p)^2 \\ \pi_3 &= \pi_2(1-p) = \pi_0(1-p)^3 \\ &\vdots \\ \pi_i &= \pi_{i-1}(1-p) = \pi_0(1-p)^i, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \tag{1}$$

και

$$\begin{aligned} 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_m = \pi_0 + \pi_0(1-p) + \dots + \pi_0(1-p)^m \\ &= \pi_0 \sum_{i=0}^m (1-p)^i = \pi_0 \frac{1 - (1-p)^{m+1}}{1 - (1-p)} = \pi_0 \frac{1 - (1-p)^{m+1}}{p} \end{aligned} \tag{2}$$

Άρα

$$\pi_0 = \frac{p}{1 - (1-p)^{m+1}}$$

και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε τελικά:

$$\pi_i = \frac{p(1-p)^i}{1 - (1-p)^{m+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

γ') Μακροπρόθεσμα, η συχνότητα με την οποία αντικαθίσταται η μπάρα ισούται με τη συχνότητα επισκέψεων της κατάστασης 0 (όπου η μπάρα λειτουργεί για 0 μέρες, δηλαδή μόλις έχει αντικατασταθεί), που είναι

$$\pi_0 = \frac{p}{1 - (1-p)^{m+1}}.$$

Καθώς $m \rightarrow \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \pi_0 = p$.

Με άλλα λόγια, για πολύ μεγάλη διάρκεια φυσικής ζωής της μπάρας ($m \rightarrow \infty$) (δηλαδή για καλή ποιότητα του εξαρτήματος), η συχνότητα αντικατάστασής της ισούται με την πιθανότητα p με την οποία ο χρήστης της προκαλεί ζημιά.

Άσκηση 3.

Ένα μηχανήμα στο καζίνο έχει ρυθμιστεί έτσι ώστε κάθε φορά που παίζει ένας παίκτης είτε κερδίζει είτε χάνει με μια πιθανότητα. Πιο συγκεκριμένα, αν σε ένα παίξιμο κερδίσει, τότε στο επόμενο παίξιμο έχει πιθανότητα να κερδίσει ξανά ίση με 0.25. Αντίστοιχα, αν σε ένα παίξιμο χάσει, τότε στο επόμενο έχει πιθανότητα να κερδίσει ίση με 0.75. Ο παίκτης πληρώνει 1€ για κάθε παίξιμο και εισπράττει 2.5€ κάθε φορά που κερδίζει, αλλιώς δεν παίρνει τίποτα. Βρείτε αν το παιχνίδι συμφέρει τον παίκτη μακροπρόθεσμα.

Λύση.

Έστω X_n το αποτέλεσμα του n -οστού παιχνιδιού, όπου $X_n = 1$ αν κερδίσει και $X_n = 0$ αν χάσει.

Εφόσον η πιθανότητα μετάβασης σε μια κατάσταση μπορεί να περιγραφεί πλήρως από την τελευταία κατάσταση, το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης έχει όλα του τα στοιχεία θετικά, επομένως η αλυσίδα περιέχει μια μοναδική κλάση, η οποία είναι απεριοδική. Επομένως, υπάρχει η στατική κατανομή της αλυσίδας και δίνεται από τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\pi} = \underline{\pi} \cdot P \\ \underline{\pi} \cdot \underline{e} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_0 = 0.25\pi_0 + 0.75\pi_1 \\ \pi_1 = 0.75\pi_0 + 0.25\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_0 = \pi_1 = 0.5$$

Το καθαρό κέρδος στην κατάσταση 0 ισούται με -1€ και στην κατάσταση 1 ισούται με $+1.5\text{€}$

Επομένως, το αναμενόμενο κέρδος ανά παιχνίδι μετά από πολλά παιχνίδια, ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα του πρώτου παιχνιδιού, είναι $\pi_0 \cdot (-1) + \pi_1 \cdot (1.5) = 0.25 > 0$. Επομένως, μακροπρόθεσμα το παιχνίδι αποφέρει κέρδος.

Άσκηση 4.

Μια εταιρία κατασκευής κλιματιστικών υποβάλλει τα κλιματιστικά με τη σειρά που παράγονται σε τεχνικό έλεγχο ποιότητας και τα χαρακτηρίζει είτε ως ‘τέλεια’ είτε ως ‘ελαττωματικά’. Έχει παρατηρηθεί ότι η ποιότητα κάθε κλιματιστικού εξαρτάται από την ποιότητα του αμέσως προηγούμενου του στη σειρά παραγωγής και ότι ένα ‘τέλειο’ κλιματιστικό ακολουθείται από ένα επίσης ‘τέλειο’ κλιματιστικό με πιθανότητα $3/4$, ενώ ένα ‘ελαττωματικό’ ακολουθείται από ένα άλλο ‘ελαττωματικό’ με πιθανότητα $1/3$. Αν το τρίτο κλιματιστικό που εξετάζεται είναι ‘τέλειο’, ποια είναι η πιθανότητα να είναι ‘τέλειο’ το εικοστό;

Λύση.

Έστω X_n η ποιότητα του n -οστού κλιματιστικού, όπου $X_n = 0$ αν το κλιματιστικό είναι ‘τέλειο’ και $X_n = 1$ είναι ‘ελαττωματικό’. Εφόσον οι πιθανότητες μετάβασης περιγράφονται πλήρως από την αμέσως προηγούμενη κατάσταση, το πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Ο πίνακας μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

Έχουμε δείξει ότι για τον πίνακα μετάβασης του n -οστού βήματος $P^{(n)}$ ισούται με τη n -οστή δύναμη του αρχικού πίνακα μετάβασης:

$$P^{(n)} = P^n, \quad n \geq 1.$$

Μας ζητείται η πιθανότητα

$$P(X_{20} = 0 | X_3 = 0) = P(X_{17} = 0 | X_0 = 0) = (P^{(17)})_{00} = (P^{17})_{00},$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τον ορισμό της Μαρκοβιανής αλυσίδας (υποθέτουμε ότι η αρχική μας κατάσταση είναι το τρίτο βήμα).

Θα υπολογίσουμε τον πίνακα P^n . Ξέρουμε ότι $P^n = U\Lambda^n U^{-1}$, όπου U είναι ο 2×2 πίνακας με στήλες τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του P και Λ είναι ο διαγώνιος πίνακας των αντίστοιχων ιδιοτιμών. Οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές υπολογίζονται μηδενίζοντας την ορίζουσα:

$$\begin{aligned} |P - \lambda I| &= 0 \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-a-\lambda & a \\ b & 1-b-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow (1-a-\lambda)(1-b-\lambda) - a \cdot b &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 - (2-a-b)\lambda - a \cdot b &= 0. \end{aligned}$$

$$\Delta = (2-a-b)^2 - 4(1-a-b) = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2-a-b) \pm (a+b)}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1-a-b \end{cases}$$

Ας συμβολίσουμε με u_1, u_2 τις δύο στήλες του U (τα ιδιοδιανύσματα του P). Για το u_1 με ιδιοτιμή λ_1 ξέρουμε ότι είναι ίσο με $u_1 = \mathbf{e} = [1, 1]^T$, αφού κάθε στοχαστικός πίνακας έχει ένα τέτοιο ζεύγος ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων.

Για το u_2 έχουμε:

$$\begin{aligned} Pu_2 = \lambda_2 u_2 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2(1)} \\ u_{2(2)} \end{bmatrix} = (1-a-b) \begin{bmatrix} u_{2(1)} \\ u_{2(2)} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (1-a)u_{2(1)} + au_{2(2)} = (1-a-b)u_{2(1)} \\ bu_{2(1)} + (1-b)u_{2(2)} = (1-a-b)u_{2(2)} \end{cases} \\ &\Rightarrow u_{2(1)} = -\frac{b}{a}u_{2(2)} \end{aligned}$$

Έστω $u_{2(1)} = a \Rightarrow u_{2(2)} = -b$. Επομένως, το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα είναι οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του

$$u_2 = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix} \\ \Rightarrow P^n &= \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix}^{-1} \\ \Rightarrow P^n &= \begin{bmatrix} 1 & a(1-a-b)^n \\ 1 & -b(1-a-b)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-b}{-a-b} & \frac{-a}{-a-b} \\ \frac{-1}{-a-b} & \frac{1}{-a-b} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow P^n &= \begin{bmatrix} 1 & a(1-a-b)^n \\ 1 & -b(1-a-b)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{1}{a+b} & \frac{-1}{a+b} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow P^n &= \begin{bmatrix} \frac{b+a(1-a-b)^n}{a+b} & \frac{a-a(1-a-b)^n}{a+b} \\ \frac{b-b(1-a-b)^n}{a+b} & \frac{a+b(1-a-b)^n}{a+b} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα

$$(P^{17})_{00} = \frac{b + a(1-a-b)^{17}}{a+b}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές $a = 1/4$, $b = 2/3$, προκύπτει ότι $(P^{17})_{00} \approx 0.7273$.