

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
6 Απριλίου 2024 - Διάρκεια: 2.5 Ωρες

Θέμα 1 - 40 μονάδες: Ροπογεννήτριες και αθροίσματα τυχαίου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.

Στη διάρκεια μίας μέρας, ο αριθμός των πελατών, M , του Πλαισίου οι οποίοι αγοράζουν υπολογιστές ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ : $M \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Υπάρχουν συνολικά n μοντέλα υπολογιστών και κάθε πελάτης αποφασίζει τυχαία και με την ίδια πιθανότητα να αγοράσει ένα από τα n διαθέσιμα μοντέλα, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες και ανεξάρτητα από το πλήθος των πελατών που επισκέπτονται το κατάστημα.

(α) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. K , του πλήθους των πελατών που αγοράζουν το μοντέλο #1.

(β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. K . Αναγνωρίζετε τη συνάρτηση πιθανότητας της K ; Ποια η πιθανότητα ότι κανένας πελάτης δεν αγοράζει το μοντέλο #1 στη διάρκεια μίας μέρας;

Βοήθεια: Ορίστε τη τ.μ. X_i που παίρνει την τιμή 1 όταν ο i -στός πελάτης αγοράζει το μοντέλο #1 και την τιμή 0, όταν ο i -στός πελάτης αγοράζει κάποιο άλλο μοντέλο. Τι κατανομή έχουν οι τ.μ. X_i ; Εκφράστε την τ.μ. K συναρτήσει των X_i .

Η αξία, C_i , κάθε υπολογιστή που πωλείται ακολουθεί συνεχή ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 1 και 3 (σε χιλιάδες ευρώ), $C_i \sim U[1, 3]$. Οι τ.μ. C_i μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητες μεταξύ τους καθώς κάθε πελάτης επιλέγει ανεξάρτητα από τους άλλους μοντέλο και το διαμορφώνει ανεξάρτητα.

(γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά του συνολικού τζίρου, R , του καταστήματος από την πώληση υπολογιστών στη διάρκεια μίας μέρας.

Το κατάστημα έχει ένα πρόγραμμα επιβράβευσης. Κάθε αγορά υπολογιστή μοντέλου #2 έως # n συνοδεύεται από ένα κουπόνι 50 ευρώ, ενώ η αγορά του μοντέλου #1 αποφέρει κουπόνια 50, 100 ή 150 ευρώ, ανάλογα με τη διαμόρφωσή του. Οι πελάτες που αγοράζουν το μοντέλο #1 επιλέγουν μία από τις 3 εκδόσεις με την ίδια πιθανότητα.

(δ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της συνολικής αξίας, S , των κουπονιών που δίνει το κατάστημα στη διάρκεια μίας μέρας.

Θέμα 2 - 30 μονάδες: Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Οι αεροπορικές εταιρίες επιθυμούν οι πτήσεις τους να είναι όσο πιο γεμάτες γίνεται. Μία πρακτική τους είναι να επιτρέπουν υπεράριθμες κρατήσεις θέσεων (το λεγόμενο overbooking) βασιζόμενες στο γεγονός ότι κάποιοι από τους επιβάτες που έχουν αγοράσει εισιτήριο δεν εμφανίζονται για την πτήση τους. Υποθέστε ότι σε κάθε πτήση το 10% των επιβατών δεν εμφανίζεται και ότι οι πελάτες δρουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Χρησιμοποιώντας το κεντρικό οριακό θεώρημα, υπολογίστε το μέγιστο αριθμό εισιτηρίων, n , που μία αεροπορική μπορεί να εκδώσει για μία πτήση 300 θέσεων ώστε να είναι 99% σίγουρη ότι δε θα αρνηθεί την επιβίβαση σε κανένα από αυτούς.

Σας δίδεται ότι για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπική Γκαουσιανής: $\Phi(2.33) = 0.99$.

Θέμα 3 - 40 μονάδες: Poisson αφίξεις.

Τα χρονικά διαστήματα, T_i , μεταξύ διαδοχικών αφίξεων μηνυμάτων σε ένα κόμβο δικτύου ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 2$. Τα χρονικά διαστήματα μετρούνται σε λεπτά της ώρας και αποτελούν ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές. Οι τιμές της διάρκειας αυτών των χρονικών διαστημάτων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων καταχωρούνται σε μικρές καρτέλες. Κάθε καρτέλα έχει χώρο για 5 καταχωρήσεις. Όταν γεμίζει μία καρτέλα, αντικαθίσταται από την επόμενη.

(α) Ποιο είναι το μέσο χρονικό διάστημα καθώς και η τυπική απόκλιση του χρόνου μεταξύ διαδοχικών αφίξεων;

(β) Έστω ότι τα τελευταία τέσσερα λεπτά δεν έχουμε λάβει κανένα μήνυμα. Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. K , του πλήθους των μηνυμάτων που θα λάβουμε την επόμενη μισή ώρα. Ποια είναι η μέση τιμή του πλήθους των μηνυμάτων;

(γ) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.), τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του χρονικού διαστήματος, D , που περνά έως ότου γεμίσουν 12 καρτέλες. Ποια είναι η πιθανότητα να περιμένουμε περισσότερο από μία ώρα για να γεμίσουν 12 καρτέλες; Δώστε την απάντησή σας συναρτήσει τιμών της αθροιστική συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

(δ) Επιλέγουμε τυχαία μία καρτέλα και μετράμε το συνολικό χρόνο Y που αυτή ήταν σε χρήση. Ποια η σ.π.π., η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. Y ;

(ε) Φτάνουμε στον κόμβο μία τυχαία χρονική στιγμή. Όταν η καρτέλα που χρησιμοποιείται τη στιγμή της άφιξής μας γεμίσει, σημειώνουμε το συνολικό χρόνο, W , που αυτή ήταν σε χρήση. Ποια η σ.π.π., η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. W ;