

6-4-2024

ΘΕΜΑ 1ο

Ορίσθηκε τη τ.τ. $X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i\text{-στός πελάτης επιλέγει το } \#1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Από την εκφώνηση έχουμε ότι $P(X_i=1) = \frac{1}{n}$ και $P(X_i=0) = 1 - \frac{1}{n}$.

Συνεπώς οι τ.τ. $X_i; i=1, 2, \dots, M$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανοημένες τ.τ. Bernoulli με παράμετρο $p = 1/n: X_i \sim \text{Bernoulli}(1/n)$.

(α) Το πλήθος, K , των πελατών που αγοράζουν το μοντέλο $\#1$ είναι:

$$K = X_1 + X_2 + \dots + X_M,$$

δηλαδή εκφράζεται ως το άθροισμα ενός τυχαίου πλήθους, M , ανεξάρτητων τ.τ. Bernoulli($1/n$), όπου $M \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Έχουμε ότι $E[X_i] = p = \frac{1}{n}$, $\text{var}(X_i) = p(1-p) = \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n^2}$

$$E[M] = \lambda = \text{var}(M).$$

Συνεπώς: $E[K] = E[M]E[X] = \lambda \cdot \frac{1}{n} = \underline{\underline{\lambda/n}}.$

$$\text{var}(K) = E[M] \text{var}(X) + \text{var}(M)(E[X])^2$$

$$= \lambda \frac{n-1}{n^2} + \lambda \frac{1}{n^2} = \underline{\underline{\lambda/n}}.$$

(β) Η γεννήτρια της Bernoulli ($p=1/n$):

$$M_{X_i}(s) = 1-p+pe^s = 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}e^s.$$

Η γεννήτρια της Poisson (λ):

$$M_M(s) = e^{\lambda(e^s-1)}$$

Έχουμε ότι: $M_K(s) = M_M(s) \Big|_{e^s \equiv M_{X_i}(s)} = e^{\lambda(e^s-1)} \Big|_{e^s = 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}e^s}$

$$\therefore \boxed{M_K(s) = e^{\frac{\lambda}{n}(e^s-1)}} \Rightarrow K \sim \text{Poisson}(\lambda/n) !!!$$

$$P(K=0) = \frac{(\lambda/n)^k}{k!} e^{-\lambda/n} \Big|_{k=0} = \underline{\underline{e^{-\lambda/n}}}.$$

$$(8) \quad f_{C_i}(c) = \begin{cases} \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} & , 1 \leq c \leq 3 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$E[C] = \frac{1+3}{2} = 2, \quad \text{var}(C) = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{4}{12} = 1/3.$$

Έχουμε ότι $R = C_1 + C_2 + \dots + C_M$

Συνεπώς τώρα έχουμε:

$$E[R] = E[M] \cdot E[C] = \lambda \cdot 2 = \underline{\underline{2\lambda}}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(R) &= E[M] \text{var}(C) + \text{var}(M) (E[C])^2 \\ &= \lambda \frac{1}{3} + \lambda \cdot 2^2 = \underline{\underline{\frac{13\lambda}{3}}} \end{aligned}$$

(8) Έστω T_i η αξία των καπνικών που δίδεται στον i -στό πελάτη που αγοράζει το μοντέλο #1. Τότε:

$$P_{T_i}(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & t=50, 100, 150 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Προφανώς $E[T_i] = 100$.

Στη διάρκεια μιας μέρας ακριβώς $M-k$ πελάτες αγοράζουν μοντέλα #2 έως #η και λαμβάνουν καπνό των 50 ευρώ. Η συνολική αξία των καπνικών που λαμβάνουν οι k πελάτες που αγοράζουν το μοντέλο #1 είναι $T_1 + \dots + T_k$.

Τελικά, $S = (M-k) \cdot 50 + (T_1 + \dots + T_k)$

$$\begin{aligned} \therefore E[S] &= (E[M] - E[k]) \cdot 50 + E[T_1 + \dots + T_k] \\ &= (E[M] - E[k]) \cdot 50 + E[k] E[T] \\ &= \left(\lambda - \frac{\lambda}{\eta} \right) 50 + \frac{\lambda}{\eta} 100 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{E[S] = 50 \lambda \left(1 + \frac{1}{\eta} \right)} \quad \#$$

ΘΕΜΑ 2ο

Υπάρχουν η ταξιδιώτες με εισιτήριο. Έστω N το πλήθος (3)

των επιβατών που εμφανίζονται στην πύλη.

Από την επιφώνηση έχουμε ότι η τ.μ. N ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $p=0.9$: $N \sim \Delta(n, p=0.9)$.

Συνεπώς $E[N] = np = 0.9n$ και
 $Var(N) = np(1-p) = n \cdot 0.9 \times 0.1 = 0.09n$

Θέχουμε $P(N > 300) \leq 0.01$ ($= 1 - 0.99$)

Χρησιμοποιώντας την De Moivre-Laplace προσέγγιση της Διωνυμικής, έχουμε ότι:

$$P(N > 300) \approx P\left(N \geq 300 + \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{N - 0.9n}{\sqrt{0.09n}} > \frac{300.5 - 0.9n}{\sqrt{0.09n}}\right) \leq 0.01$$

$$\therefore 1 - \Phi\left(\frac{300.5 - 0.9n}{\sqrt{0.09n}}\right) \leq 0.01$$

$$\therefore \Phi\left(\frac{300.5 - 0.9n}{\sqrt{0.09n}}\right) \geq 0.99 = \Phi(2.33)$$

$$\therefore 300.5 - 0.9n \geq 2.33 \sqrt{0.09n} = 2.33 \times 0.3 \sqrt{n} = 0.699 \sqrt{n}$$

$$\therefore \sqrt{n} \leq 429.9 - 1.2876n$$

Ασφαλώς πρέπει $429.9 - 1.2876n > 0 \Rightarrow n \leq 333$

Οι ρίζες της $(\sqrt{x})^2 = (429.9 - 1.2876x)^2$ είναι: $x_1 = 319.95$
 $x_2 = 348.41$

Επομένως, $\boxed{n \leq 319}$

(α) Καθώς $T_i \sim \exp(\lambda)$, έχουμε ότι

$$E[T_i] = 1/\lambda = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ λεντά}$$

$$\sigma_{T_i} = \sqrt{\text{var}(T_i)} = \sqrt{1/\lambda^2} = 1/\lambda = 0.5 \text{ λεντά}.$$

(β) Λόγω έλλειψης μνήμης της Γ.δ. Poisson, η κατανομή του K είναι Poisson με παράμετρο λt , όπου $t = 30$ λεντά (δεν εξαρτάται από το τι έγινε τα προηγούμενα 4 λεντά).

$$K \sim \text{Poisson}(60) : P_K(k) = \frac{60^k}{k!} e^{-60}; k=0,1,2,\dots$$

$$E[K] = 60 \text{ μηνύματα}.$$

(γ) Κάθε καρτέλα χωράει 5 καταχωρήσεις. Επομένως οι πρώτες 12 καρτέλες γεμίζουν με την $5 \times 12 = 60$ -στή αρίθμηση.

Συνεπώς η $D = T_1 + \dots + T_{60}$ ακολουθεί Erlang τάξης 60 με παρ. $\lambda = 2$

$$f_D(d) = \frac{2^{60} d^{59}}{59!} e^{-2d}; d \geq 0$$

$$E[D] = 60/2 = 30 \text{ λεντά} \quad \text{var}(D) = \frac{60}{\lambda^2} = \frac{60}{4} = 15 \text{ [λεντά}^2\text{]}.$$

$$P(D > 60) = P\left(\frac{D-30}{\sqrt{15}} > \frac{60-30}{\sqrt{15}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{30}{\sqrt{15}}\right).$$

(δ) Ο χρόνος χρήσης μιας τυχαία επιλεγμένης καρτέλας είναι:

$$Y = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 \sim \text{Erlang τάξης } k=5 \text{ με παρ. } \lambda=2;$$

$$f_Y(y) = \frac{2^5 y^4}{4!} e^{-2y}, \quad E[Y] = 5/\lambda = 5/2, \quad \text{var}(Y) = \frac{5}{\lambda^2} = \frac{5}{4}.$$

(ε) Σε αυτή την περίπτωση, $W = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + L$ όπου L περιέχει τη χρονική διαφορά της άφιξης της μεταξύ διαδοχικών μηνυμάτων $L \sim \text{Erlang τάξης } 2$. Οι T_1, T_2, T_3, T_4 iid εκθετικές.

$\Rightarrow W$: Erlang τάξης 6 με παρ. $\lambda=2$:

$$f_W(w) = \frac{2^6 w^5}{5!} e^{-2w}, \quad E[W] = \frac{6}{\lambda} = 3, \quad \text{var}(W) = \frac{6}{\lambda^2} = \frac{3}{2}.$$