

**ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2025**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

**Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων**

**Άσκηση 1**

Έστω συνεχής τ.μ.  $X$ , με ροπογεννήτρια συνάρτηση που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$M_X(s) = \frac{b - 5s}{s^2 - 8s + 15}.$$

1. Να υπολογίσετε τη σταθερά  $b$ .
2. Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τ.μ.  $X$ .
3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της τ.μ.  $X$ ,  $E[X]$ , χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ.  $X$ .
4. Να υπολογίσετε τη διασπορά της τ.μ.  $X$ ,  $\text{Var}(X)$ , χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ.  $X$ .
5. Να υπολογίσετε την πιθανότητα  $P(X \geq 3)$ .
6. Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη πιθανότητα  $P(1 \leq X \leq 3 \mid 0 \leq X \leq 3)$ .

**Λύση**

1. Να υπολογίσετε τη σταθερά  $b$ .

Για κάθε τυχαία μεταβλητή ισχύει ότι  $M_X(0) = 1$ :

$$M_X(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{b - 5 \cdot 0}{0^2 - 8 \cdot 0 + 15} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{15} = 1 \Rightarrow b = 15.$$

2. Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τ.μ.  $X$ .

Αντικαθιστούμε το  $b = 15$  στη ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_X(s) = \frac{15 - 5s}{s^2 - 8s + 15}.$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή:

$$M_X(s) = \frac{-5(s - 3)}{(s - 3)(s - 5)} = \frac{-5}{s - 5} = \frac{5}{5 - s}$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της εκθετικής κατανομής με παράμετρο  $\lambda$  έχει τη μορφή:

$$M(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}.$$

Στη περίπτωση μας  $\lambda=5$ , άρα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της τ.μ.  $X$ ,  $E[X]$ , χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ.  $X$ .

**Α' Τρόπος**

Για την εκθετική κατανομή ισχύει:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}.$$

**Β' Τρόπος**

$$M_X(s) = \frac{5}{5-s} \Rightarrow M'_X(s) = \frac{5}{(5-s)^2}.$$

Επομένως:

$$E[X] = M'_X(0) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

4. Να υπολογίσετε τη διασπορά της τ.μ.  $X$ ,  $\text{Var}(X)$ , χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ.  $X$ .

**Α' Τρόπος**

Για την εκθετική κατανομή ισχύει:

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{25}.$$

**Β' Τρόπος**

$$E[X^2] = M''_X(s) \Big|_{s=0} = \frac{2 \cdot 5}{(5-s)^3} \Big|_{s=0} = \frac{10}{(5-s)^3} \Big|_{s=0} = \frac{10}{125} = \frac{2}{25}.$$

$$E^2[X] = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

Άρα:

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{2}{25} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{2}{25} - \frac{1}{25} = \frac{1}{25}.$$

5. Να υπολογίσετε την πιθανότητα  $P(X \geq 3)$ .

$$P(X \geq 3) = \int_3^\infty f_X(x) = \int_3^\infty 5e^{-5x} dx$$

$$\int e^{-5x} dx = \frac{e^{-5x}}{-5} = -\frac{1}{5}e^{-5x}$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$P(X \geq 3) = 5 \left[ -\frac{1}{5}e^{-5x} \right]_3^\infty.$$

Για  $x \rightarrow \infty$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-5x} = 0$ .

Για  $x = 3$ :  $-e^{-15}$

Επομένως:

$$P(X \geq 3) = 5 \left( 0 + \frac{1}{5}e^{-15} \right) = e^{-15}.$$

6. Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη πιθανότητα  $P(1 \leq X \leq 3 \mid 0 \leq X \leq 3)$ .

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3 \mid 0 \leq X \leq 3) &= \frac{P(1 \leq X \leq 3, 0 \leq X \leq 3)}{P(0 \leq X \leq 3)} = \frac{P(1 \leq X \leq 3)}{P(0 \leq X \leq 3)} = \frac{\int_1^3 f_X(x) dx}{\int_0^3 f_X(x) dx} \\ &= \frac{\int_1^3 5e^{-5x} dx}{\int_0^3 5e^{-5x} dx} = \frac{[-e^{-5x}]_1^3}{[-e^{-5x}]_0^3} = \frac{-e^{-15} - (-e^{-5})}{1 - e^{-15}} = \frac{e^{-5} - e^{-15}}{1 - e^{-15}} \end{aligned}$$

## Άσκηση 2

Έστω δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$ . Η τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί κατανομή *Poisson* με παράμετρο  $\lambda = 2$  και η τυχαία μεταβλητή  $Y$  ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda = 3$ .

- Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής  $W = 2(X + Y) + 5$ .
- Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής  $X + 2Y$ .

## Λύση

- Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής  $W = 2(X + Y) + 5$ .

Για την κατανομή *Poisson* με παράμετρο  $\lambda$  ισχύει ότι  $M(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}$ .

Για την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda$  ισχύει ότι  $M(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$ .

(α) Για το άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ.  $Y = X_1 + \dots + X_n$ , ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(X_1 + \dots + X_n)}] = E[e^{s(X_1)}] \times \dots \times E[e^{s(X_n)}] = M_{X_1}(s) \times \dots \times M_{X_n}(s)$$

Θέτω  $L = X + Y$ , άρα  $W = 2L + 5$ .

Επομένως,

$$M_L(s) = M_{X+Y}(s) = M_X(s) \cdot M_Y(s) = e^{\lambda_X(e^s - 1)} \cdot \frac{\lambda_Y}{\lambda_Y - s} = e^{2(e^s - 1)} \cdot \frac{3}{3 - s}$$

Άρα

$$M_L(s) = e^{2(e^s - 1)} \cdot \frac{3}{3 - s}$$

(β) Για τον γραμμικό συνδυασμό μιας τ.μ.,  $Y = aX + b$ , ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(aX + b)}] = e^{sb} E[e^{saX}] = e^{sb} M_X(sa)$$

Επομένως,

$$M_W(s) = M_{2L+5}(s) = M_{aL+b}(s) = e^{sb} M_L(sa) = e^{5s} \cdot e^{2(e^{2s} - 1)} \cdot \frac{3}{3 - 2s}$$

2. Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής  $X + 2Y$ .

Για το άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ.  $Y = X_1 + \dots + X_n$ , ισχύει ότι:

$$M_Y(s) = E[e^{s(X_1 + \dots + X_n)}] = E[e^{s(X_1)}] \times \dots \times E[e^{s(X_n)}] = M_{X_1}(s) \times \dots \times M_{X_n}(s)$$

Θέτω  $L = X + 2Y$ .

Επομένως,

$$M_L(s) = M_{X+2Y}(s) = M_X(s) \cdot M_Y(2s) = e^{\lambda_X(e^s-1)} \cdot \frac{\lambda_Y}{\lambda_Y - 2s} = e^{2(e^s-1)} \cdot \frac{3}{3-2s}$$

Άρα

$$M_L(s) = e^{2(e^s-1)} \cdot \frac{3}{3-s}$$

### Άσκηση 3

Έστω συνεχής τυχαία μεταβλητή  $X$ , με ροπογεννήτρια συνάρτηση που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$M_X(s) = e^{4s+s^2}$$

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή  $Z$ , η οποία ορίζεται ως εξής:

$$Z = 3X - 5$$

Να υπολογιστούν:

1. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ.  $Z$ ,  $M_Z(s)$ .
2. Η μέση τιμή της τ.μ.  $Z$ ,  $E[Z]$ .
3. Η διασπορά της τ.μ.  $Z$ ,  $\text{Var}(Z)$ .

### Λύση

1. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ  $Z$  γίνεται:

$$\begin{aligned} M_Z(s) &= E[e^{sZ}] = E[e^{s(3X-5)}] = E[e^{3s \cdot X} \cdot e^{-5s}] = \\ &= e^{-5s} \cdot E[e^{3s \cdot X}] = \\ &= e^{-5s} \cdot M_X(3s) = \\ &= e^{-5s} \cdot e^{12s+9s^2} = e^{7s+9s^2} \end{aligned}$$

2. Η μέση τιμή της τ.μ  $Z$  γίνεται:

$$E[Z] = M'_Z(s)|_{s=0} = e^{7s+9s^2} \cdot (7 + 18s)|_{s=0} = e^0 \cdot 7 + 0 = 7$$

3. Η διασπορά της τ.μ  $Z$  γίνεται:

$$\begin{aligned} \text{var}(Z) &= E[Z^2] - (E[Z])^2 = M_Z''(s)|_{s=0} - 7^2 = e^{7s+9s^2}(7+18s)^2 + 18e^{7s+9s^2} \Big|_{s=0} - 49 = \\ &= e^0 \cdot 7^2 + 18 - 49 = 67 - 49 = 18 \end{aligned}$$

## Άσκηση 4

Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή  $X$  για την οποία ισχύει:

$$M_X(s) = ae^s + be^{3s} + ce^{7s}, E[X] = 4 \quad \text{και} \quad \text{Var}(X) = 6.$$

όπου  $a$ ,  $b$  και  $c$  είναι σταθερές.

1. Υπολογίστε τις σταθερές  $a$ ,  $b$  και  $c$ .
2. Βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας της  $X$ .

## Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{d}{ds}M_X(s) = \frac{d}{ds}(a(e^s) + b(e^{3s}) + c(e^{7s})) = a(e^s) + 3b(e^{3s}) + 7c(e^{7s})$$

$$\frac{d^2}{ds^2}M_X(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}M_X(s)\right) = \frac{d}{ds}(a(e^s) + 3b(e^{3s}) + 7c(e^{7s})) = a(e^s) + 9b(e^{3s}) + 49c(e^{7s})$$

Για να βρούμε τις σταθερές  $a$ ,  $b$ , και  $c$  χρησιμοποιούμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$M(0) = 1 \Rightarrow a + b + c = 1 \Rightarrow a = 1 - b - c \tag{1}$$

Αντικαθιστώντας την (1) στις παρακάτω εξισώσεις έχουμε:

$$E[X] = 4 \Leftrightarrow \frac{d}{ds}M_X(s)|_{s=0} = 4 \Leftrightarrow a + 3b + 7c = 4 \Rightarrow (1 - b - c) + 3b + 7c = 4 \Rightarrow 2b + 6c = 3$$

$$\text{Var}(X) = 6 \Leftrightarrow E[X^2] - (E[X])^2 = 6 \Leftrightarrow \frac{d^2}{ds^2}M_X(s)|_{s=0} - 4^2 = 6 \Leftrightarrow \frac{d^2}{ds^2}M_X(s)|_{s=0} = 22$$

$$\Leftrightarrow a + 9b + 49c = 22 \Leftrightarrow (1 - b - c) + 9b + 49c = 22 \Leftrightarrow 8b + 48c = 21$$

Λύνοντας το παρακάτω σύστημα βρίσκουμε τιμές για τα  $b$ ,  $c$ :

$$\begin{cases} 2b + 6c = 3 \\ 8b + 48c = 21 \end{cases}$$

και μετά αντικαθιστώντας τα  $b, c$  στην (1) βρίσκουμε και το  $a$ .

Άρα έχουμε συνολικά ότι:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{7} \\ b &= \frac{1}{2} \\ c &= \frac{5}{14} \end{aligned}$$

Οπότε η ροπογεννήτρια συνάρτηση γίνεται:

$$M_X(s) = \frac{1}{7}e^s + \frac{1}{2}e^{3s} + \frac{5}{14}e^{7s}$$

Η συνάρτηση πιθανότητας της  $X$  προκύπτει από τις δυνάμεις του  $e^s$  και τους συντελεστές  $a, b$  και  $c$  που βρήκαμε παραπάνω. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X=1) &= a = \frac{1}{7} \\ P(X=3) &= b = \frac{1}{2} \\ P(X=7) &= c = \frac{5}{14} \end{aligned}$$

## Άσκηση 5

Το πλήθος των πελατών που καλούν ένα τηλεφωνικό κέντρο σε μία συγκεκριμένη ημέρα μοντελοποιείται ως μία τ.μ. Ποισσον με παράμετρο  $\lambda$ . Ο χρόνος (σε λεπτά) που απαιτείται για την εξυπηρέτηση κάθε πελάτη ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 10 και διασπορά 4.

Έστω  $Y$  ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών της ημέρας.

1. Να βρείτε το μετασχηματισμό στιγμών της τυχαιάς μεταβλητής  $Y$ , δηλαδή  $M_Y(s)$ .
2. Να υπολογίσετε την μέση τιμή  $E[Y]$ .
3. Να υπολογίσετε τη διασπορά  $\text{Var}(Y)$ .

## Λύση

1. Να βρείτε το μετασχηματισμό στιγμών της τυχαιάς μεταβλητής  $Y$ , δηλαδή  $M_Y(s)$ .

Έστω  $N$  το πλήθος των πελατών που καλούν ένα τηλεφωνικό κέντρο. Εφόσον η  $N$  είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο  $\lambda$ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός που της αντιστοιχεί δίνεται από την εξής σχέση:

$$M_N(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}$$

Έστω  $X_i$  ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση κάθε πελάτη  $i$ . Έστω  $M_X(s)$  ο κοινός μετασχηματισμός που αντιστοιχεί στις τ.μ.  $X_i$ . Εφόσον κάθε  $X_i$  είναι κανονικά κατανομημένη μέση τιμή 10 και διασπορά 4, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός που της αντιστοιχεί δίνεται από την εξής σχέση:

$$M_X(s) = e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2} + \mu s}$$

Ο μετασχηματισμός  $M_Y(s)$  προσδιορίζεται αντικαθιστώντας στην έκφραση του  $M_N(s)$  όπου  $e^s$  με  $M_X(s)$ . Έτσι, έχουμε τελικά:

$$M_Y(s) = M_N(s) \Big|_{e^s = M_X(s)} = e^{\lambda(e^s - 1)} \Big|_{e^s = M_X(s)} = e^{\lambda(M_X(s) - 1)} = e^{\lambda(e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2} + \mu s} - 1)}$$

2. Να υπολογίσετε την μέση τιμή  $E[Y]$ .

Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη μέση τιμή της τ.μ.  $Y$ , ισχύει η σχέση (Wald's equation):

$$E[Y] = E[X]E[N]$$

Εφόσον η  $N$  είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο  $\lambda$ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:  $E[N] = \lambda$ .

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$E[Y] = \mu \cdot \lambda = 10\lambda$$

3. Να υπολογίσετε τη διασπορά  $\text{Var}(Y)$ .

Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι για τη μέση τιμή της τ.μ.  $Y$ , ισχύει η σχέση (Wald's equation):

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[X]E[N] + (E[X])^2 \text{Var}[N]$$

Εφόσον η  $N$  είναι μία τ.μ. *Poisson* με παράμετρο  $\lambda$ , από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:  $\text{Var}[N] = \lambda$ .

Άρα, τελικά, έχουμε:

$$\text{Var}[Y] = 4\lambda + (10)^2\lambda = \lambda(100 + 4) = 104\lambda$$

## Άσκηση 6

Ένας αυτοκινητιστής περνά 4 φανάρια και καθένα από αυτά είναι κόκκινο με πιθανότητα  $p = 1/2$ . Οι χρόνοι αναμονής,  $X_i$ , στα φανάρια όπου τον πιάνει το κόκκινο είναι ανεξάρτητες εκθετικά κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 1 λεπτό. Έστω  $Y$  ο συνολικός χρόνος αναμονής στα φανάρια.

- Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ.  $Y$ .
- Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τ.μ.  $Y$ .
- Επαληθεύστε την απάντησή σας στο (α) χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια της τ.μ.  $Y$  που υπολογίσατε στο (β).

**Λύση**

Καθώς κάθε φανάρι το βρίσκει κόκκινο με  $p = 1/2$ , ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα, το πλήθος  $N$  των φαναριών που βρίσκει ακολουθεί διωνυμική κατανομή:  $N \sim \Delta(n = 4, p = 1/2)$ .

$$P_N(k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

$$E[N] = np = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, \quad \text{var}(N) = np(1-p) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1. \quad (3)$$

Η ροπογεννήτρια του  $N$  είναι:

$$M_N(s) = (1 - p + pe^s)^n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^s\right)^4 = \frac{(1 + e^s)^4}{2^4}. \quad (4)$$

Επιπλέον,

$$X_i \sim \exp(\lambda = 1)$$

$$P_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x} = e^{-x}, \quad x \geq 0. \quad (5)$$

$$E[X_i] = \frac{1}{\lambda} = 1, \quad \text{var}(X_i) = \frac{1}{\lambda^2} = 1. \quad (6)$$

$$M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s} = \frac{1}{1 - s}. \quad (7)$$

(α) Ο συνολικός χρόνος αναμονής,  $Y$ , είναι το άθροισμα ενός διωνυμικά κατανεμημένου αριθμού ανεξάρτητων τ.μ.  $X_1, X_2, \dots$  που ακολουθούν εκθετική κατανομή. Συνεπώς,

$$E[Y] = E[N]E[X] = 2 \cdot 1 = 2. \quad (8)$$

$$\text{var}(Y) = \text{var}(X)E[N] + \text{var}(N)(E[X])^2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1^2 = 3. \quad (9)$$

(β)

$$M_Y(s) = M_N(s) \Big|_{e^s = M_X(s)} = \frac{(1 + M_X(s))^4}{2^4} = \frac{(1 + \frac{1}{1-s})^4}{2^4} = \frac{1}{2^4} \left(\frac{2-s}{1-s}\right)^4. \quad (10)$$

(γ)

$$M'_Y(s) = \frac{1}{2^4} 4(1 + M_X(s))^3 M'_X(s) = \frac{1}{4} (1 + M_X(s))^3 M'_X(s). \quad (11)$$

Επομένως,

$$E[Y] = M'_Y(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{4} (1 + M_X(0))^3 M'_X(0) = \frac{1}{4} (1 + 1)^3 \cdot E[X] = \frac{8}{4} \cdot 1 = 2. \quad (12)$$

$$M''_Y(s) = \frac{1}{4} 3(1 + M_X(s))^2 (M'_X(s))^2 + \frac{1}{4} (1 + M_X(s))^3 M''_X(s). \quad (13)$$

Επομένως,

$$E[Y^2] = M''_Y(s) \Big|_{s=0} = \frac{3}{4} (1 + M_X(0))^2 (M'_X(0))^2 + \frac{1}{4} (1 + M_X(0))^3 M''_X(0). \quad (14)$$

$$= \frac{3}{4} (1 + 1)^2 (E[X])^2 + \frac{1}{4} (1 + 1)^3 E[X^2]. \quad (15)$$

$$= 3 \cdot 1^2 + 2(\text{var}(X) + (E[X])^2) \quad (16)$$

$$= 3 + 2(1 + 1) = 7. \quad (17)$$

$$\text{var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 7 - 2^2 = 3. \quad (18)$$