

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες-Εαρινό Εξάμηνο 2025
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Πακέτα πληροφορίας καταφτάνουν σε έναν κόμβο του δικτύου σύμφωνα με μία στοχαστική διαδικασία *Poisson* με ένταση 1500 πακέτα το δευτερόλεπτο.

- 1) Ποια είναι η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι την άφιξη του 10000-στού πακέτου;
- 2) Ποιο είναι το μέσο πλήθος των πακέτων που φτάνουν στον κόμβο μεταξύ 06:50 και 07:00;
- 3) Ποια είναι η πιθανότητα ότι ακριβώς 10 πακέτα φτάνουν στον κόμβο στη διάρκεια 0.01 δευτερολέπτων;
- 4) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ της άφιξης του 1000-στού και του 1001-στού πακέτου είναι μεγαλύτερο από 0.0005 δευτερόλεπτα;

Λύση

- 1) Το χρονικό διάστημα T_{10000} έως την άφιξη των 10000-στών πακέτων ακολουθεί κατανομή *Erlang* τάξης 10000 με παράμετρο $\lambda = 1500$. Επομένως:

$$E[T_{10000}] = \frac{10000}{1500} \text{ σε } s = 6.67 \text{ sec}$$

- 2) Το πλήθος των πακέτων N_{600} που φτάνουν μεταξύ 06:50 - 07:00, δηλαδή σε ένα διάστημα 10 λεπτών ή 600 sec, ακολουθεί *Poisson* κατανομή με παράμετρο 1500×600 . Επομένως:

$$E[N_{600}] = 1500 \times 600 = 900000 \text{ πακέτα}$$

- 3) Το πλήθος των πακέτων $N_{0.01}$ που φτάνουν σε 0.01 sec ακολουθεί *Poisson* κατανομή με παράμετρο $1500 \times 0.01 = 15$. Συνεπώς:

$$P(N_{0.01} = 10) = \frac{15^{10}}{10!} e^{-15}$$

$$= 0.0486$$

- 4) Το χρονικό διάστημα T μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 1500 sec^{-1} :

$$T \sim e^{1500}$$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_T(t) = 1 - e^{-1500t}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned}
 P(T > 0.0005) &= 1 - F_T(0.0005) \\
 &= e^{-1500 \times 0.0005} \\
 &= 0.4724
 \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Οι μεταφορικές εταιρίες S και T στέλνουν φορτία από την Αθήνα στο Ηράκλειο σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους στοχαστικές διαδικασίες *Poisson* με ρυθμούς λ_S και λ_T (φορτία ανά ημέρα), αντίστοιχα. Το βάρος κάθε φορτίου σε τόνους, ανεξάρτητα από ποια μεταφορική προέρχεται, είναι τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.5, & x = 600, \\ 0.3, & x = 1000, \\ 0.2, & x = 2000, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- 1) Ποια είναι η πιθανότητα του γεγονότος: 5 φορτία φτάνουν στο Ηράκλειο μεταξύ 09:00-15:00 μέσω της μεταφορικής S ΚΑΙ 7 φορτία φτάνουν στο Ηράκλειο μεταξύ 16:00-24:00 μέσω της μεταφορικής T ;
- 2) Υπολογίστε το μέσο βάρος του συνολικού φορτίου που φτάνει στο Ηράκλειο στη διάρκεια 6 ωρών.

Λύση

- 1) Έστω

$$\begin{aligned}
 A &= \{5 \text{ φορτία από τη μεταφορική } S \text{ σε } 6 \text{ η μεταξύ } 09:00 - 15:00\} \\
 B &= \{7 \text{ φορτία από τη μεταφορική } T \text{ σε } 8 \text{ η μεταξύ } 16:00 - 24:00\}
 \end{aligned}$$

Ζητούμε $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ καθώς τα A και B είναι ανεξάρτητα γεγονότα επειδή ορίζονται σε μη επικαλυπτόμενα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα και επιπλέον αφορούν ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες *Poisson*.

Ορίζουμε: S_t : πλήθος φορτίων σε χρόνο t από τη μεταφορά S και T_t : πλήθος φορτίων σε χρόνο t από τη μεταφορά T .

$$S_{t_1} \sim \text{Poisson}(\lambda_s t), \quad \text{όπου } t_1 = 6/24 = 1/4 \text{ ημέρες}$$

$$T_{t_2} \sim \text{Poisson}(\lambda_T t_2), \quad \text{όπου } t_2 = 8/24 = 1/3 \text{ ημέρες}$$

Υπολογίζουμε τις πιθανότητες:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(S_{t_1} = 5) = \frac{(\lambda_s/4)^5}{5!} e^{-\lambda_s/4} \\
 P(B) &= P(T_{t_2} = 7) = \frac{(\lambda_T/3)^7}{7!} e^{-\lambda_T/3} \\
 P(A \cap B) &= \frac{(\lambda_s/4)^5}{5!} e^{-\lambda_s/4} \times \frac{(\lambda_T/3)^7}{7!} e^{-\lambda_T/3}
 \end{aligned}$$

- 2) Έστω R_t το πλήθος των συνολικών φορτίων και από τις δύο μεταφορές που φτάνουν σε χρόνο $\delta h = \frac{1}{4}$ ημερών:

$$R_t \sim \text{Poisson}(\lambda_s t + \lambda_T t)$$

$$E[R_t] = \frac{\lambda_s + \lambda_T}{4}$$

Έστω X_i το βάρος του i -οστού φορτίου.

$$E[X_i] = 0.5 \times 600 + 0.3 \times 1000 + 0.2 \times 2000 = 1000 \text{ τόνοι}$$

Το βάρος X των συνολικών φορτίων είναι:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{R_t}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X_i] \cdot E[R_t] = 1000 \times \frac{\lambda_s + \lambda_T}{4} \\ &= 250(\lambda_s + \lambda_T) \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Βρίσκεστε για κατασκήνωση στον Αμαζόνιο, αλλά ξεχάσατε το εντομοαπωθητικό σας. Ως αποτέλεσμα, κάθε δευτερόλεπτο σας τσιμπάει ένα κουνούπι με πιθανότητα $p=0.2$.

- 1) Ποια η συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά;
- 2) Ποια η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά;
- 3) Τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα δεν σας έχει τσιμπήσει κανένα κουνούπι. Ποια η μέση τιμή του χρονικού διαστήματος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι για πρώτη φορά (μετρώντας από $t=10$);

Λύση

- 1) Το σενάριο όπου κουνούπια ανεξάρτητα προσγειώνονται πάνω σας, μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια στοχαστική διαδικασία $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητων τ.μ. Bernoulli με κάθε δοκιμή X_i να αποτελεί το γεγονός όπου ένα κουνούπι προσγειώνεται πάνω σας με πιθανότητα p :

$$p_{X_i}(x) = \begin{cases} 0.2, & x = 1 \\ 0.8, & x = 0 \end{cases}$$

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο χρόνος T μέχρι την πρώτη επιτυχία σε μια στοχαστική διαδικασία Bernoulli μοντελοποιείται ως μια Γεωμετρική τ.μ. με παράμετρο p , άρα η ζητούμενη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το χρόνο μέχρι να προσγειωθεί πάνω σας το πρώτο κουνούπι θα είναι Γεωμετρική με $p = 0.2$:

$$p_T(t) = \begin{cases} (1-p)^{t-1} \cdot p = (1-0.2)^{t-1} \cdot 0.2 = (0.8)^{t-1} \cdot 0.2, & t \geq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- 2) Η μέση τιμή της Γεωμετρικής με παράμετρο p είναι $\frac{1}{p}$, επομένως ο μέσος χρόνος μέχρι να σας τσιμπήσει κουνούπι πρώτη φορά θα είναι $\frac{1}{0.2} = 5$ δευτερόλεπτα.

- 3) Επειδή η διαδικασία Bernoulli δεν έχει μνήμη, δεν έχει σημασία πότε σας τσίμπησε πρώτη φορά ένα κουνούπι και αν αυτό έγινε το 1ο δευτερόλεπτο, το 2ο, το 20ο ή το 200ο. Επομένως, η μέση τιμή του χρόνου μετρώντας από τη στιγμή $t = 10$ θα είναι και πάλι $\frac{1}{0.2} = 5$ δευτερόλεπτα.

Άσκηση 4.

Υποθέστε ότι έχετε n κόλλες χαρτιού σε ένα συρτάρι. Ζωγραφίζετε σε μία κόλλα, την υπογράφετε και στη συνέχεια, αντί να την τοποθετήσετε στην άκρη, την βάζετε ξανά πίσω στο συρτάρι. Εάν κάθε κόλλα είναι το ίδιο πιθανόν να ζωγραφιστεί κάθε φορά, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες, ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός από κόλλες που θα έχετε ζωγραφίσει, πριν υπογράψετε και τις n κόλλες;

Λύση

Θεωρούμε M το συνολικό αριθμό χαρτιών που τραβάμε από το συρτάρι μέχρι να ζωγραφίσουμε και τις n κόλλες. Έστω T_i να είναι ο αριθμός των χαρτιών που τραβάμε μέχρι να τραβήξουμε την επόμενη μη ζωγραφισμένη κόλλα, αφού έχουμε ζωγραφίσει i κόλλες. Τότε $M = T_0 + \dots + T_{n-1}$.

Μπορούμε να θεωρήσουμε την διαδικασία του να τραβάμε την επόμενη κενή κόλλα αφού έχουμε ζωγραφίσει i κόλλες, ως μία ακολουθία Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p_i = \frac{n-i}{n}$, εφόσον υπάρχουν $n - i$ κενές σελίδες από το σύνολο n σελιδών. Κάθε φύλλο χαρτιού έχει την ίδια ανεξάρτητη πιθανότητα να επιλεγεί από το συρτάρι. Η διαδικασία τραβήγματος φύλλων χαρτιού από το συρτάρι μέχρι να πετύχουμε την επόμενη κενή κόλλα, αφού έχουμε ζωγραφίσει i κόλλες, ακολουθεί γεωμετρική πρόοδο.

Η πιθανότητα να χρειαστούμε k προσπάθειες μέχρι να τραβήξουμε την επόμενη κενή κόλλα, αφού έχουμε ζωγραφίσει i κόλλες είναι:

$$P(T_i = k) = (1 - p_i)^{k-1} p_i$$

Η αναμενόμενη τιμή του M είναι:

$$E[M] = E[\sum_{i=0}^{n-1} T_i] = \sum_{i=0}^{n-1} E[T_i] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n-i} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Άσκηση 5.

Για τις ανάγκες της δουλειάς σας, έχετε κάνει για μία μέρα εκτροπή από το τηλέφωνο της εργασίας στο προσωπικό σας τηλέφωνο. Ως αποτέλεσμα, όταν χτυπήσει το τηλέφωνό σας δεν γνωρίζετε αν είναι επαγγελματικό ή προσωπικό. Υποθέστε ότι όταν χτυπήσει είναι επαγγελματικό με πιθανότητα p ή προσωπικό τηλεφώνημα με πιθανότητα $1 - p$. Στο τέλος του ωραρίου σας, έχετε δεχτεί συνολικά 30 κλήσεις.

- 1) Ποια η ΣΜΠ, η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των επαγγελματικών τηλεφωνημάτων;
- 2) Προσδιορίστε την μέση τιμή της απόλυτης διαφοράς των αριθμών των δύο ειδών τηλεφωνημάτων.
- 3) Υποθέστε ότι το πρώτο τηλεφώνημα είναι επαγγελματικό. Ποια η δεσμευμένη ΣΜΠ, μέση τιμή και διασπορά των επαγγελματικών κλήσεων;

Λύση

- 1) Οι επαγγελματικές κλήσεις X κατανέμονται Διωνυμικά με παραμέτρους p και $n = 30$.

$$P_X(k) = \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k}.$$

Η μέση τιμή και η διασπορά είναι $E[X] = 30p$, $var(X) = 30p(1-p)$.

- 2) Συμβολίζουμε με X τις επαγγελματικές κλήσεις και με Y τις προσωπικές κλήσεις. Προφανώς, $X + Y = 30$.

$$\begin{aligned} E[|X - Y|] &= E[X - Y | X > Y] \cdot P(X > Y) + E[Y - X | X \leq Y] \cdot P(X \leq Y) \\ &= E[X - Y | X > 15] \cdot P(X > 15) + E[Y - X | X \leq 15] \cdot P(X \leq 15) \end{aligned}$$

Έχουμε,

$$P(X > Y) = P(X > 15) = \sum_{k=16}^{30} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k},$$

$$P(X \leq Y) = P(X \leq 15) = \sum_{k=0}^{15} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k},$$

$$\begin{aligned} E[X - Y | X > 15] &= E[2X - 30 | X > 15] \\ &= 2E[X | X > 15] - 30 \\ &= 2 \sum_{k=0}^{30} k P_X(k | X > 15) - 30 \\ &= \frac{2}{P(X > 15)} \sum_{k=0}^{30} k P_X(k \cap X > 15) - 30 \\ &= \frac{2}{P(X > 15)} \sum_{k=16}^{30} k P_X(k) - 30 \\ &= \frac{2}{P(X > 15)} \sum_{k=16}^{30} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - 30, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y - X | X \leq 15] &= E[30 - 2X | X \leq 15] \\ &= 30 - 2E[X | X \leq 15] \\ &= 30 - 2 \sum_{k=0}^{30} k P_X(k | X \leq 15) \\ &= 30 - \frac{2}{P(X \leq 15)} \sum_{k=0}^{30} k P_X(k \cap X \leq 15) \\ &= 30 - \frac{2}{P(X \leq 15)} \sum_{k=0}^{15} k P_X(k) \\ &= 30 - \frac{2}{P(X \leq 15)} \sum_{k=0}^{15} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 E[|X - Y|] &= \left(\frac{2}{P(X > 15)} \sum_{k=16}^{30} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - 30 \right) \cdot P(X > 15) \\
 &\quad + \left(30 - \frac{2}{P(X \leq 15)} \sum_{k=0}^{15} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) \cdot P(X \leq 15) \\
 &= 2 \sum_{k=16}^{30} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - 2 \sum_{k=0}^{15} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - 30(P(X > 15) - P(X \leq 15)) \\
 &= 2 \left(\sum_{k=16}^{30} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - \sum_{k=0}^{15} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) \\
 &\quad - 30 \left(\sum_{k=16}^{30} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - \sum_{k=0}^{15} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) \\
 &= 2 \left(\sum_{k=0}^{30} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - 2 \sum_{k=0}^{15} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) \\
 &\quad - 30 \left(\sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} - 2 \sum_{k=0}^{15} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) \\
 &= 2 \left(30p - 2 \sum_{k=0}^{15} k \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) - 30 \left(1 - 2 \sum_{k=0}^{15} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} \right) \\
 &= 60p - 30 + 2 \sum_{k=0}^{15} (30 - 2k) \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k}
 \end{aligned}$$

(Θα μπορούσαμε να σταματήσουμε στην τρίτη ισότητα, αλλά καταλήξαμε σε μια πολύ πιο απλή έκφραση).

Σημείωση: Στην τέταρτη ισότητα, προσθέσαμε και αφαιρέσαμε τα αθροίσματα $\sum_{k=0}^{15} (\cdot)$. Στην πέμπτη ισότητα, αναγνωρίσαμε ότι $\sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k} = E[X] = 30p$ και ότι $\sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k}$ είναι το άθροισμα της Διωνυμικής ΣΜΠ σε ολόκληρο το πεδίο τιμών της, το οποίο ισούται με 1.

- 3) Ο αριθμός των υπόλοιπων επαγγελματικών κλήσεων X_r κατανέμεται Διωνυμικά με παραμέτρους p και $n = 29$. Ο συνολικός αριθμός επαγγελματικών κλήσεων είναι $X = 1 + X_r$. Επομένως, $E[X|X \geq 1] = 1 + E[X_r] = 1 + 29p$ και $var(X|X \geq 1) = var(X_r) = 29p(1-p)$. Ας υπολογίσουμε την ΣΜΠ,

$$\begin{aligned}
 p_X(k|X \geq 1) &= \frac{p_X(k \cap X \geq 1)}{p(X \geq 1)} = \begin{cases} \frac{p_X(k)}{1-p_X(0)}, & k \geq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\binom{30}{k} p^k (1-p)^{30-k}}{1-(1-p)^{30}}, & k \geq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

Ένας ψαράς πιάνει ψάρια σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 0.6$ ανά ώρα. Ο ψαράς αρχικά ψαρεύει για δύο ώρες. Εάν σε αυτό το διάστημα πιάσει τουλάχιστον ένα ψάρι, τότε σταματάει το ψάρεμα. Διαφορετικά, συνεχίζει μέχρι να πιάσει ένα ψάρι οπότε και σταματάει το ψάρεμα.

- 1) Βρείτε την πιθανότητα ότι θα αναγκαστεί να ψαρεύει παραπάνω από δύο ώρες.

- 2) Βρείτε την πιθανότητα ότι πιάνει τουλάχιστον δύο ψάρια.
- 3) Βρείτε τον μέσο συνολικό χρόνο ψαρέματος, δεδομένου ότι ήδη ψαρεύει για 4 ώρες.
- 4) Βρείτε την πιθανότητα ότι ο συνολικός χρόνος που περνάει ψαρεύοντας είναι μεγαλύτερος των δύο και μικρότερος ή ίσος των επτά ωρών.
- 5) Προσομοιώστε την παραπάνω άσκηση σε γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας, εκτελώντας 10^4 πειράματα όπου στο κάθε πείραμα υπολογίζετε τον συνολικό χρόνο ψαρέματος του ψαρά. Απεικονίστε την παραπάνω κατανομή σε ένα ιστόγραμμα. Δοκιμάστε για μικρότερες τιμές του λ και εξηγήστε συνοπτικά τις παρατηρήσεις σας.
(Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε συναρτήσεις όπως *poissrnd()* για Matlab ή *random.poisson()* για Python).

Λύση

- 1) Αυτή είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει άφιξη για 2 ώρες. Δίδεται από:

$$P(0, 2) = e^{-0.6 \cdot 2} = 0.301.$$

Εναλλακτική λύση: Αυτή είναι η πιθανότητα ότι η πρώτη άφιξη έρχεται μετά από 2 ώρες:

$$P(T_1 > 2) = \int_2^\infty f_{T_1}(t) dt = \int_2^\infty 0.6 e^{-0.6t} dt = e^{-0.6 \cdot 2} = 0.301.$$

- 2) Αν πιάσει τουλάχιστον δύο ψάρια, πρέπει να έχει ψαρέψει για ακριβώς δύο ώρες. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με την πιθανότητα ότι ο αριθμός των ψαριών που πιάνονται κατά τις πρώτες δύο ώρες είναι τουλάχιστον 2, δηλαδή:

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(k, 2) = 1 - P(0, 2) - P(1, 2) = 1 - e^{-0.6 \cdot 2} - (0.6 \cdot 2)e^{-0.6 \cdot 2} = 0.337.$$

Εναλλακτική λύση: Το γεγονός που μας ενδιαφέρει συμβαίνει αν και μόνο αν ο χρόνος Y_2 της δεύτερης άφιξης είναι λιγότερος ή ίσος με 2. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(Y_2 \leq 2) = \int_0^2 f_{Y_2}(y) dy = \int_0^2 (0.6)^2 y e^{-0.6y} dy.$$

Αυτό το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας κατά μέρη, όμως αυτός ο υπολογισμός είναι πιο περίπλοκος σε σχέση με την πρώτη λύση.

- 3) Δεδομένου ότι ο ψαράς ήδη ψαρεύει για 4 ώρες, ο μελλοντικός χρόνος ψαρέματος είναι ο χρόνος μέχρι να πιαστεί το πρώτο ψάρι. Λόγω της έλλειψης μνήμης της στοχαστικής διαδικασίας Poisson, ο μελλοντικός χρόνος είναι εκθετικός με μέση τιμή $\frac{1}{\lambda}$. Επομένως, ο μέσος συνολικός χρόνος ψαρέματος είναι:

$$4 + \frac{1}{0.6} = 5.667.$$

- 4) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα ο ψαράς να μην πιάσει κανένα ψάρι στις πρώτες 2 ώρες, και πιάσει τουλάχιστον 1 στις υπόλοιπες 5 ώρες. Η πρώτη πιθανότητα μας δίνεται από το ερώτημα (α), ενώ η δεύτερη μπορεί να υπολογιστεί ως $1 - P(0, 5) = 1 - e^{-0.6 \cdot 5} = 0.95$. Άρα η τελική ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $P = 0.3 \cdot 0.95 = 0.285$.

- 5) Όπως βλέπουμε, για μεγαλύτερο λ (αριστερή εικόνα) το μεγαλύτερο πλήθος της κατανομής βρίσκεται σε μικρές τιμές του χρόνου, ενώ καθώς το μειώνουμε (δεξιά εικόνα) η κατανομή "απλώνεται" σε μεγαλύτερο εύρος.

