

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο
2024-2025

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 11/4/2025

Ημερομηνία Παράδοσης 5/5/2025

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

- α) Μία υπολογιστική μηχανή χρησιμοποιεί τα ψηφία 0 και 1 για τους υπολογισμούς της, οι οποίοι πραγματοποιούνται σε διακριτά στάδια. Σε κάθε στάδιο η πιθανότητα να αλλάξει η τιμή ενός ψηφίου είναι p και η πιθανότητα να παραμείνει η ίδια είναι $1 - p$. Σχεδιάστε την μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει την τιμή ενός ψηφίου, καθώς και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασής του.
- β) Ένας μεθυσμένος περιφέρεται ανάμεσα σε πέντε τετράγωνα στην 62 Μαρτύρων (όπως στο παρακάτω σχήμα). Εάν βρίσκεται στο δεύτερο, το τρίτο ή το τέταρτο τετράγωνο, τότε πάει σε ένα από τα διπλανά τετράγωνα με ίση πιθανότητα. Εάν βρεθεί στο πρώτο τετράγωνο όπου βρίσκεται το σπίτι του ή στο πέμπτο όπου βρίσκεται το μπαρ παραμένει εκεί μέχρι το πρωί. Σχεδιάστε την μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει την κίνηση του μεθυσμένου, καθώς και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασής της.

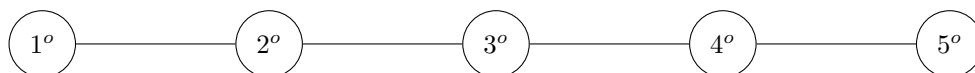
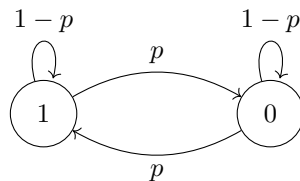


Figure 1: Απεικόνιση των τετραγώνων όπου περιπλανιέται ο μεθυσμένος.

Λύση

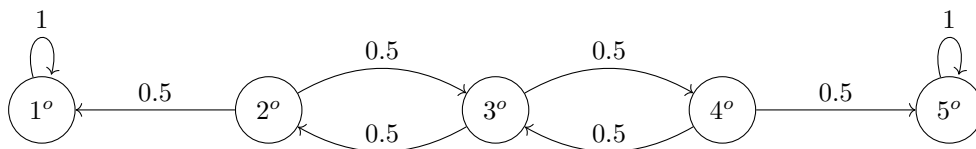
α) Η αλυσίδα που περιγράφει τις μεταβολές των ψηφίων είναι η εξής:



Με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \end{matrix}$$

β) Από την εκφώνηση παρατηρούμε ότι η αλυσίδα έχει δύο έμμονες καταστάσεις, την 1 και την 5, καθώς ο μεθυσμένος θα παραμείνει σε αυτά τα τετράγωνα μέχρι το πρωί, άρα μπορεί να μεταβεί από αυτές μόνο στον εαυτό τους με πιθανότητα 1. Εάν βρίσκεται σε μία από τις υπόλοιπες καταστάσεις αναγκαστικά θα πάει σε μία από τις διπλανές της με πιθανότητα 0.5. Οπότε ο γράφος μεταβάσεων της αλυσίδας είναι:



Με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

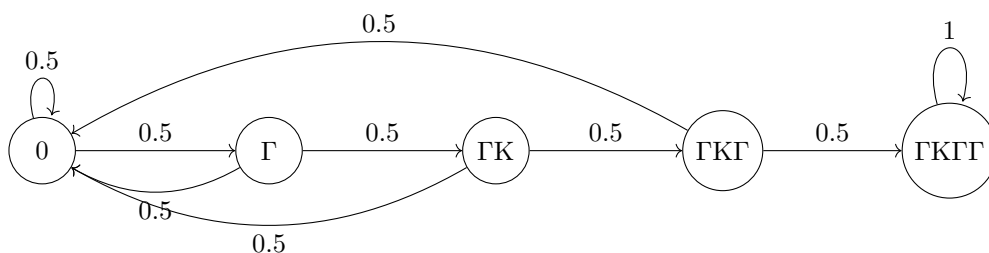
Άσκηση 2

Ο καθηγητής στοχαστικών διαδικασιών κος Λυκίδης όταν βαριέται στις ώρες γραφείου του παίζει το εξής παιχνίδι: Ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα επανειλημμένα και μετράει μετά από πόσες ρίψεις θα πετύχει την ακολουθία {Γ, Κ, Γ, Γ}

- Σχεδιάστε την μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει το παιχνίδι και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασής της.
- Υπολογίστε την πιθανότητα το παιχνίδι να τελειώσει με τον ελάχιστο αριθμό ρίψεων.
- Υπολογίστε την πιθανότητα το παιχνίδι να τελειώσει το πολύ μετά από 7 ρίψεις.
- Βρείτε την στατική κατανομή της αλυσίδας.

Λύση

α) Η αλυσίδα που περιγράφει το παιχνίδι είναι η εξής:



Με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$\begin{array}{c} 0 \quad \Gamma \quad \Gamma\Gamma \quad \Gamma\Gamma\Gamma \quad \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma \\ \begin{array}{c} 0 \\ \Gamma \\ \Gamma\Gamma \\ \Gamma\Gamma\Gamma \\ \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma \end{array} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα να μεταβούμε από μία κατάσταση κατ' ευθείαν στην επόμενη στην ακολουθία, σε ένα βήμα. Δηλαδή είναι η:

$$P(\text{shortest}) = p_{0,\Gamma} \cdot p_{\Gamma,\Gamma\Gamma} \cdot p_{\Gamma\Gamma,\Gamma\Gamma\Gamma} \cdot p_{\Gamma\Gamma\Gamma,\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma} = 0.5^4 = 0.625$$

- γ) Η αλυσίδα της εκφώνησης είναι πολύ βολική για το συγκεκριμένο ερώτημα, καθώς η "τελική" κατάσταση του συστήματος είναι έμμονη, δηλαδή αν καταλήξει το σύστημα σε αυτή σε λιγότερο από 7 βήματα απλά θα παραμείνει σε αυτήν, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $r_{0,\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma}(7)$. Και βρίσκοντας την 7η δύναμη του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης έχουμε ότι η πιθανότητα είναι ~ 0.1563
- δ) Στο συγκεκριμένο σύστημα δεν χρειάζεται να λύσουμε το σύστημα της στατικής κατανομής, καθώς παρατηρούμε ότι έχει μόνο μία έμμονη κατάσταση, την $\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma$. Αυτό σημαίνει ότι σε βάθος χρόνου το σύστημα θα βρίσκεται σε αυτήν με πιθανότητα 1. Δηλαδή η στατική κατανομή της αλυσίδας είναι:

$$\pi = [0, 0, 0, 0, 1]$$

Άσκηση 3

Θεωρήστε τον παρακάτω πίνακα:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{array}{c} A \quad B \quad \Gamma \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ \Gamma \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

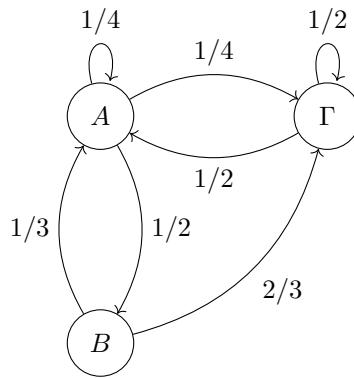
- α) Δείξτε ότι είναι πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης και σχεδιάστε την μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει.
- β) Υπολογίστε την πιθανότητα να καταλήξουμε στην κατάσταση B σε 5 βήματα, ξεκινώντας από την κατάσταση Γ.
- γ) Υπολογίστε την πιθανότητα να βρεθούμε για πρώτη φορά στην κατάσταση Γ μετά από 6 βήματα, δεδομένου ότι ξεκινάμε από την κατάσταση Α.
- δ) Υπολογίστε την πιθανότητα σε διάστημα 10 βημάτων να ξεκινήσουμε από την κατάσταση B και να μην μεταβούμε ποτέ ξανά σε αυτήν.
- ε) Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας της αλυσίδας.
- στ) Βρείτε την στατική κατανομή της αλυσίδας.

Λύση

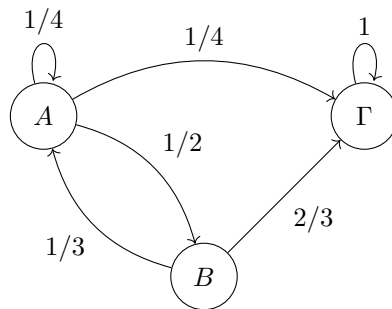
- α) Ο πίνακας είναι όντως π.π.μ καθώς ισχύει πως:

$$0.25 + 0.5 + 0.25 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0.5 + 0.5 = 1$$

Δηλαδή οι τιμές σε κάθε γραμμή του πίνακα αθροίζονται στη μονάδα, ενώ η αλυσίδα που περιγράφει είναι η:



- β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $r_{\Gamma,B}(5)$, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε με την 5η δύναμη του πίνακα μετάβασης και είναι $r_{\Gamma,B}(5) \approx 0.19$
- γ) Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα θα πρέπει να τροποποιήσουμε την αλυσίδα ελαφρώς και να μετατρέψουμε την κατάσταση Γ σε έμμονη κατάσταση. Με αυτόν τον τρόπο δεν θα χρειαστεί να ασχοληθούμε με την πιθανότητα το σύστημα να μεταβεί σε αυτήν πριν από την 6η μετάβαση. Η τροποποιημένη αλυσίδα είναι η εξής:

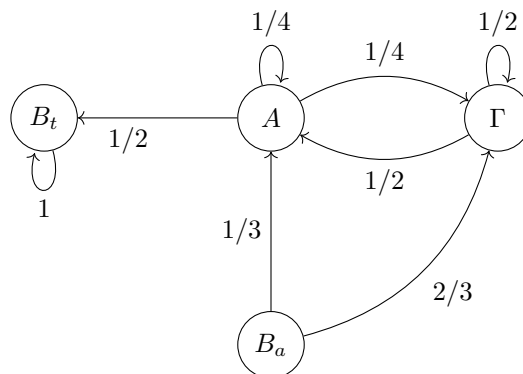


Παρατηρούμε ότι το να βρεθούμε για πρώτη στην Γ μετά από 6 βήματα σημαίνει πως μετά από 5 βήματα αναγκαστικά θα βρισκόμαστε είτε στην A είτε στην B (αφού αν μεταβούμε στην Γ πιο νωρίς δεν μπορούμε να φύγουμε). Άρα το 6ο βήμα θα είναι αναγκαστικά η μεταβολή από την A στην Γ και από την B στην Γ . Άρα η πιθανότητα είναι:

$$P(\gamma) = r_{A,A}(5) \cdot p_{A,\Gamma} + r_{A,B}(5) \cdot p_{B,\Gamma}$$

Και με την 5η δύναμη του τροποποιημένου π.π.μ βρίσκουμε ότι ξεκινώντας από την A , η πιθανότητα να μεταβούμε στην Γ για πρώτη φορά μετά από 6 βήματα είναι $0.032 \cdot 0.25 + 0.031 \cdot 0.66 \approx 0.02871$.

- δ) Για το συγκεκριμένο ερώτημα θα αντικαταστήσουμε την B με δύο καταστάσεις. Η μία, B_a είναι μία κατάσταση από την οποία το σύστημα μπορεί μόνο να εξέλθει και θα έχει τις πιθανότητες μετάβασης από την B σε άλλες καταστάσεις. Η άλλη B_t είναι μία έμμονη κατάσταση στην οποία θα πηγαίνουν πλέον όλες οι μεταβάσεις προς την B . Η τροποποιημένη αλυσίδα έχει το εξής σχήμα:



Και έχει τον εξής π.π.μ

$$\begin{array}{c} A \quad B_a \quad B_t \quad \Gamma \\ A \left[\begin{array}{cccc} 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{array} \right] \\ B_a \left[\begin{array}{cccc} 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \end{array} \right] \\ B_t \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ \Gamma \left[\begin{array}{cccc} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right] \end{array}$$

Προφανώς το να μην βρισκόμαστε στην B_t σε 10 βήματα σημαίνει ότι θα είμαστε είτε στην A , είτε στην Γ . Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι η:

$$\begin{aligned} P(\delta) &= P(\{\text{Βρισκόμαστε στην } A \text{ μετά από 10 βήματα}\} \cup \{\text{Βρισκόμαστε στην } \Gamma \text{ μετά από 10 βήματα}\}) = \\ &= r_{B_a, A}(10) + r_{B_a, \Gamma}(10) \end{aligned}$$

Και βρίσκοντας την 10η δύναμη του τροποποιημένου π.π.μ. έχουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι $0.041 + 0.041 = 0.082$.

ε) Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\begin{aligned} \pi_A &= \frac{1}{4}\pi_A + \frac{1}{3}\pi_B + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \\ \pi_B &= \frac{1}{2}\pi_A \\ \pi_\Gamma &= \frac{1}{4}\pi_A + \frac{2}{3}\pi_B + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \end{aligned}$$

στ) Για να βρούμε την στατική κατανομή λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας, μαζί με την γνωστή σχέση $\pi_A + \pi_B + \pi_\Gamma = 1$. Εξετάζοντας πρώτα τις εξισώσεις ισορροπίας έχουμε:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \pi_A = \frac{1}{4}\pi_A + \frac{1}{3}\pi_B + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \\ \pi_B = \frac{1}{2}\pi_A \\ \pi_\Gamma = \frac{1}{4}\pi_A + \frac{2}{3}\pi_B + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_A = \frac{1}{4}\pi_A + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi_A + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \\ \pi_B = \frac{1}{2}\pi_A \\ \pi_\Gamma = \frac{1}{4}\pi_A + \frac{2}{3}\pi_B + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_A = \frac{1}{4}\pi_A + \frac{1}{6}\pi_A + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \\ \pi_B = \frac{1}{2}\pi_A \\ \pi_\Gamma = \frac{1}{4}\pi_A + \frac{2}{3}\pi_B + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \left. \begin{array}{l} \pi_A = \frac{10}{24}\pi_A + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \\ \pi_B = \frac{1}{2}\pi_A \\ \pi_\Gamma = \frac{1}{4}\pi_A + \frac{2}{3}\pi_B + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{14}{24}\pi_A = \frac{1}{2}\pi_\Gamma \\ \pi_B = \frac{1}{2}\pi_A \\ \pi_\Gamma = \frac{1}{4}\pi_A + \frac{2}{3}\pi_B + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{7}{6}\pi_A = \pi_\Gamma \\ \pi_B = \frac{1}{2}\pi_A \\ \pi_\Gamma = \frac{1}{4}\pi_A + \frac{2}{3}\pi_B + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \left. \begin{array}{l} \frac{7}{6}\pi_A = \pi_\Gamma \\ \pi_B = \frac{1}{2}\pi_A \\ \pi_\Gamma = \frac{1}{4}\pi_A + \frac{2}{3}\pi_B + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{7}{6}\pi_A = \pi_\Gamma \\ \pi_B = \frac{1}{2}\pi_A \\ \pi_\Gamma = \frac{1}{4}\pi_A + \frac{2}{3}\pi_B + \frac{1}{2}\pi_\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα π_B, π_Γ στην δεύτερη έκφραση έχουμε:

$$1 = \pi_A + \pi_B + \pi_\Gamma = \pi_A + \frac{1}{2}\pi_A + \frac{7}{6}\pi_A = \frac{16}{6}\pi_A \Rightarrow \pi_A \approx 0.375$$

Άρα η στατική κατανομή είναι:

$$\pi = [0.375, 0.185, 0.437]$$

Άσκηση 4

Ρίχνουμε επανειλημμένα ένα δίκαιο ζάρι και ορίζουμε S_n ως το άθροισμα των n πρώτων ρίψεων.

- Έστω R_n το υπόλοιπο της διαίρεσης του S_n με το 7, δηλαδή $R_n = S_n \bmod 7$. Δείξτε ότι η ακολουθία $R_1, R_2, R_3 \dots$ παρουσιάζει τη μαρκοβιανή ιδιότητα.
- Βρείτε τις πιθανότητες μετάβασης της αλυσίδας εξετάζοντας την πιθανότητα μετάβασης από το R_n στο R_{n+1} και τις τιμές τις οποίες μπορεί να πάρει.
- Βρείτε την πιθανότητα το S_n σε βάθος χρόνου να διαιρείται με το 7.

Λύση

- Έστω X_n το αποτέλεσμα της n -οστής ρίψης του ζαριού, με S_n, R_n όπως τα ορίσαμε παραπάνω. Θέλουμε να δείξουμε ότι το R_{n+1} εξαρτάται μόνο από την τιμή των R_n και X_{n+1} . Αξιοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα της πράξης $\bmod$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + X_{n+1} \Rightarrow \\ \bmod(S_{n+1}, 7) &= \bmod(S_n + X_{n+1}, 7) \Rightarrow \\ \bmod(S_{n+1}, 7) &= \bmod(S_n, 7) + \bmod(X_{n+1}, 7) \Rightarrow \\ R_{n+1} &= R_n + \bmod(X_{n+1}, 7) \end{aligned}$$

Βλέπουμε όντως ότι η τιμή του R_{n+1} εξαρτάται μόνο από τα R_n και X_n , δηλαδή η ακολουθία $R_1, R_2, R_3 \dots$ παρουσιάζει την μαρκοβιανή ιδιότητα.

- Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα μετάβασης της αλυσίδας από το i στο j , όπου $i, j \in \{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$. Αυτές οι πιθανότητες είναι οι πιθανότητες του γεγονότος {Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $(i + X_{n+1})$ με το 7 είναι j }. Αρχικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι καμία από τις πιθανές τιμές των X_n δεν έχει υπόλοιπο 0 όταν διαιρείται με το 7, δηλαδή σε κάθε περίπτωση $i \neq j$. Ακόμη, παρατηρούμε ότι το σύνολο που προκύπτει αν προσθέσουμε κάποιο i σε όλες τις τιμές του $X_n \bmod 7$, θα είναι όλα τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης με το 7, εκτός του i . Για παράδειγμα, $\{1 + 2, 2 + 2, 3 + 2, 4 + 2, 5 + 2, 6 + 2\} \rightarrow \{3, 4, 5, 6, 0, 1\} \pmod{7}$. Τέλος, ξέρουμε ότι τα X_n παίρνουν κάθε δυνατή τιμή με ίση πιθανότητα. Μπορούμε άρα να εξάγουμε ότι οι πιθανότητες μετάβασης της αλυσίδας έχουν την εξής μορφή:

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{6}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}, \quad \forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Για να απαντήσουμε στο συγκεκριμένο ερώτημα χρειαζόμαστε την στατική κατανομή της αλυσίδας, άρα (φαινομενικά) χρειάζεται να λύσουμε το εξής σύστημα εξισώσεων:

$$\left. \begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 + \frac{1}{6}\pi_4 + \frac{1}{6}\pi_5 + \frac{1}{6}\pi_6 \\ \pi_1 &= \frac{1}{6}\pi_0 + \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 + \frac{1}{6}\pi_4 + \frac{1}{6}\pi_5 + \frac{1}{6}\pi_6 \\ \pi_2 &= \frac{1}{6}\pi_0 + \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_3 + \frac{1}{6}\pi_4 + \frac{1}{6}\pi_5 + \frac{1}{6}\pi_6 \\ \pi_3 &= \frac{1}{6}\pi_0 + \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_4 + \frac{1}{6}\pi_5 + \frac{1}{6}\pi_6 \\ \pi_4 &= \frac{1}{6}\pi_0 + \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 + \frac{1}{6}\pi_5 + \frac{1}{6}\pi_6 \\ \pi_5 &= \frac{1}{6}\pi_0 + \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 + \frac{1}{6}\pi_4 + \frac{1}{6}\pi_6 \\ \pi_6 &= \frac{1}{6}\pi_0 + \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 + \frac{1}{6}\pi_4 + \frac{1}{6}\pi_5 \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 \end{aligned} \right\}$$

Η λύση του οποίου είναι προφανώς χρονοβόρα και αρκετά δύσκολη. Αντ' αυτού μπορούμε να παρατηρήσουμε από τις πιθανότητες μετάβασης που εξάγαμε παραπάνω πως αν το σύστημα είναι σε μία κατάσταση, μεταβαίνει σε κάθε άλλη κατάσταση εκτός αυτής που βρίσκεται με ίση πιθανότητα. Αυτό σημαίνει πως σε βάθος χρόνου η συχνότητα με την οποία επισκέπτεται κάθε κατάσταση θα είναι η ίδια, δηλαδή:

$$\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \pi_6$$

Και επειδή οι τιμές της στατικής κατανομής πρέπει να αθροίζονται στη μονάδα, μπορούμε να δούμε ότι η στατική κατανομή είναι:

$$\pi = \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7} \right]$$

Το ερώτημα μας ζητάει την πιθανότητα το S_n να διαιρείται σε βάθος χρόνου με το 7, δηλαδή την πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση 0 σε βάθος χρόνου, η οποία είναι $\frac{1}{7}$.

Άσκηση 5

Ένας δρομέας προπονείται για τον μαραθώνιο τρέχοντας τουλάχιστον 20 χιλιόμετρα κάθε μέρα και σημειώνοντας τον χρόνο που του παίρνει για να τρέξει κάθε χιλιόμετρο. Λίγες μέρες πριν τον αγώνα αποφασίζει να αναλύσει τους χρόνους του χρησιμοποιώντας μία μαρκοβιανή αλυσίδα, χωρίς να τους διαχωρίσει ανάλογα τη μέρα. Βλέπει πως η ταχύτητά του μεταβάλλεται ανάμεσα στα 8.5 και 11 *min/km* σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 8.5 & 9 & 10 & 10.5 & 11 \\ \begin{array}{c} 8.5 \\ 9 \\ 10 \\ 10.5 \\ 11 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

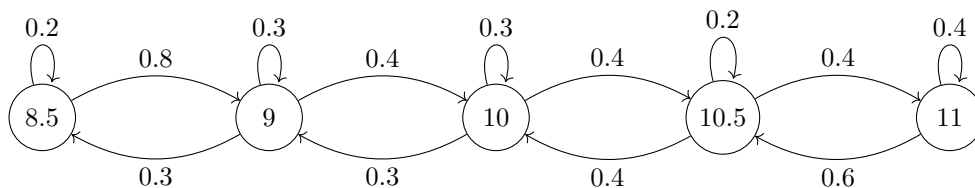
- 1) Γράψτε έναν πιθανό τρόπο με τον οποίο μπορεί να μεταβληθεί η ταχύτητα του δρομέα σε διάστημα 10 χιλιομέτρων.
- 2) Σχεδιάστε την αλυσίδα που περιγράφει ο πίνακας και εξηγήστε αν είναι στοχαστική διαδικασία Γεννήσεως-Θανάτου.
- 3) Υπολογίστε τις εξισώσεις ισορροπίας, καθώς και τις τοπικές εξισώσεις ισορροπίας.
- 4) Υπολογίστε την στατική κατανομή της αλυσίδας, καθώς και την μέση ταχύτητα του δρομέα.

Λύση

α) Μία πιθανή μετάβαση της ταχύτητας του δρομέα είναι:

$$11 \rightarrow 10.5 \rightarrow 10.5 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 8.5 \rightarrow 8.5$$

β) Η αλυσίδα έχει την εξής μορφή:



Η αλυσίδα είναι σ.δ γεννήσεως-θανάτου, αφού οι μόνες μεταβάσεις από οποιαδήποτε κατάσταση είναι είτε προς τον εαυτό της είτε προς τις "διπλανές" της καταστάσεις.

β) Οι γενικές εξισώσεις ισορροπίας είναι οι εξής:

$$\pi_1 = 0.2\pi_1 + 0.3\pi_2$$

$$\pi_2 = 0.8\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.3\pi_3$$

$$\pi_3 = 0.4\pi_2 + 0.3\pi_3 + 0.4\pi_4$$

$$\pi_4 = 0.4\pi_3 + 0.2\pi_4 + 0.6\pi_5$$

$$\pi_5 = 0.4\pi_4 + 0.4\pi_5$$

Και οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας είναι οι:

$$0.8\pi_1 = 0.3\pi_2$$

$$0.4\pi_2 = 0.3\pi_3$$

$$0.4\pi_3 = 0.4\pi_4$$

$$0.4\pi_4 = 0.6\pi_5$$

δ) Η στατική κατανομή προκύπτει από τις τοπικές εξισώσεις ισορροπίας και την συνθήκη κανονικοποίησης μέσω της αναγωγής στην π_1 :

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot \frac{0.8}{0.3} = 2.66\pi_1$$

$$\pi_3 = \pi_1 \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.3 \cdot 0.3} = 3.5\pi_1$$

$$\pi_4 = \pi_1 \frac{0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.4}{0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.4} = 3.5\pi_1$$

$$\pi_5 = \pi_1 \frac{0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4}{0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 2.37\pi_1$$

Οπότε έχουμε:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 \Rightarrow \pi_1(1 + 2.66 + 3.5 + 3.5 + 2.37) = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{13.5} = 0.076$$

Οπότε η στατική κατανομή είναι:

$$\pi = [0.076, 0.204, 0.268, 0.268, 0.181]$$

Και η μέση ταχύτητα του δρομέα είναι: $8.5 \cdot 0.076 + 9 \cdot 0.204 + 10 \cdot 0.268 + 10.5 \cdot 0.268 + 11 \cdot 0.181 = 9.967 \text{ min/km}$

Άσκηση 6

Ένα ζωτικό διέπραξε σοβαρά εγκλήματα κατά της Βασιλίσσας του, οπότε και το τιμώρησε να περιπλανιέται επ'άπειρον στον άπειρο γράφο της παρακάτω εικόνας, ξεκινώντας από τον κόμβο με την ταμπέλα 0.

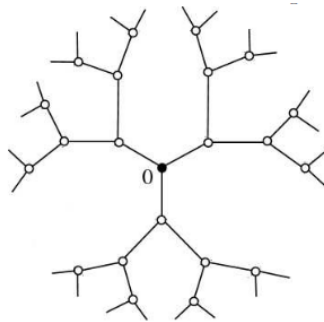


Figure 2: Ο γράφος της φυλακής του ζωτικού.

Το ζωτικό κινείται στον γράφο με τον εξής τρόπο, όταν βρίσκεται σε έναν κόμβο Z_i , επιλέγει τον επόμενο κόμβο Z_{i+1} από τους τρεις γειτονικούς του με ίση πιθανότητα. Ορίζουμε την τ.μ. $D(Z_i)$ ως την απόσταση του ζωτικού από τον αρχικό κόμβο. Για παράδειγμα, στο πρώτο βήμα υποχρεωτικά θα είναι $D(Z_1) = 1$ και αν στο επόμενο βήμα δεν επιστρέψει στον κόμβο 0, $D(Z_2) = 2$ κ.ο.κ.

α) Δείξτε ότι οι $D(Z_1)$, $D(Z_2)$, ... παρουσιάζουν την μαρκοβιανή ιδιότητα.

β) Εξετάστε αν η μαρκοβιανή αλυσίδα αυτή είναι σ.δ. γεννήσεως-θανάτου. Αν είναι σ.δ. γεννήσεως θανάτου, γράψτε την γενική μορφή των εξισώσεων ισορροπίας για κάποιο D .

γ) *Bonus*: Σχεδιάστε την αλυσίδα.

Λύση

- α) Έστω η τωρινή απόσταση του ξωτικού $D(Z_n)$, η απόσταση του την επόμενη χρονική στιγμή θα είναι $D(Z_{n+1}) = D(Z_n) \pm 1$. Άρα η απόστασή του την επόμενη χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την απόστασή του την τωρινή χρονική στιγμή, δηλαδή η απόστασή του ξωτικού παρουσιάζει την μαρκοβιανή ιδιότητα.
- β) Οι μόνες μεταβάσεις που μπορούν να γίνουν από μία κατάσταση είναι είτε 1 βήμα πιο κοντά στη θέση 0 είτε 1 βήμα πιο μακριά, δηλαδή μπορεί να μεταβεί μόνο στις "διπλανές" αποστάσεις, άρα είναι σ.δ. γεννήσεως-θανάτου. Η γενική μορφή των εξισώσεων ισορροπίας είναι:

$$D(Z_i) = \frac{1}{3}D(Z_{i-1}) + \frac{2}{3}D(Z_{i+1})$$

- γ) Η αλυσίδα είναι η εξής:

