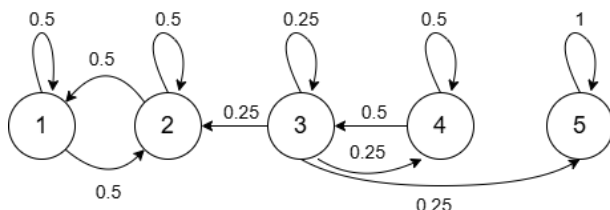


Ενδεικτικές Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω η παρακάτω αλυσίδα Markov:



- (α) Αναγνωρίστε τις έμμονες και τις μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας. Για κάθε έμμονη κατάσταση αποφασίστε αν είναι περιοδική (και με ποια περίοδο) ή αperiοδική.
- (β) Προσδιορίστε τις κλάσεις επικοινωνίας.
- (γ) Υποθέτοντας ότι η διαδικασία αρχίζει από την κατάσταση 4, υπολογίστε τις πιθανότητες απορρόφησης για την κάθε κλάση επικοινωνίας.
- (δ) Ξεκινώντας από την κατάσταση 4, ποιος είναι ο μέσος αριθμός μεταβάσεων μέχρι να φτάσουμε για πρώτη φορά σε μια κλάση επικοινωνίας (συμπεριλαμβανομένης και της μετάβασης στην οποία φτάνουμε στην κλάση);

Λύση:

- (α) Οι καταστάσεις 3,4 είναι μεταβατικές, ενώ οι υπόλοιπες είναι έμμονες. Όλες οι καταστάσεις είναι αperiοδικές.
- (β) Κλάση $A : \{1, 2\}$, κλάση $B : \{5\}$.
- (γ) Θα ξεκινήσουμε υπολογίζοντας την πιθανότητα απορρόφησης για την κλάση $A : \{1, 2\}$.

$$\alpha_2 = 1$$

$$\alpha_5 = 0$$

$$\alpha_3 = 0.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot \alpha_3 + 0.25 \cdot \alpha_4 + 0.25 \cdot 0$$

$$\alpha_4 = 0.5 \cdot \alpha_3 + 0.5 \cdot \alpha_4$$

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε $\alpha_3 = \alpha_4$ και άρα

$$\alpha_4 = 0.25 + 0.25 \cdot \alpha_4 + 0.25\alpha_4 \Rightarrow \alpha_4 = 0.5.$$

Για την πιθανότητα απορρόφησης για την κλάση $B : \{5\}$ θα έχουμε $\alpha_4^B = 1 - \alpha_4^A = 1 - 0.5 = 0.5$, καθώς η αλυσίδα έχει μονάχα δύο κλειστές κλάσεις επικοινωνίας.

(δ)

$$\mu_2 = \mu_5 = 0$$

$$\mu_3 = 1 + 0.25 \cdot 0 + 0.25 \cdot \mu_3 + 0.25 \cdot \mu_4 + 0.25 \cdot 0$$

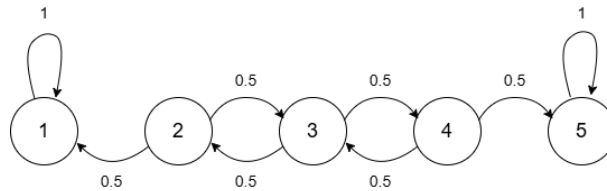
$$\mu_4 = 1 + 0.5\mu_3 + 0.5\mu_4$$

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε $\mu_3 = \mu_4 - 2$. Άρα

$$\mu_4 - 2 = 1 + 0.25 \cdot (\mu_4 - 2) + 0.25 \cdot \mu_4 \Rightarrow 0.5 \cdot \mu_4 = 3 - 0.5 \Rightarrow \mu_4 = 5$$

Άσκηση 2.

Έστω το πρόβλημα 1β του 4ου σετ ασκήσεων του μαθήματος, στο οποίο ένας μεθυσμένος περιφέρεται ανάμεσα σε 5 τετράγωνα, με το πρώτο τετράγωνο να αντιπροσωπεύει το σπίτι του και το πέμπτο να αντιπροσωπεύει το μπαρ. Όπως είδαμε, το παραπάνω πρόβλημα μοντελοποιείται με την παρακάτω μαρκοβιανή αλυσίδα.



- (α) Ποια η πιθανότητα ο μεθυσμένος να φτάσει σπίτι του, δεδομένου ότι ξεκινάει από το τετράγωνο 4;
- (β) Ξεκινώντας από το τετράγωνο 3, ποιος είναι ο μέσος αριθμός μεταβάσεων μέχρι να φτάσει είτε στο σπίτι του, είτε στο μπαρ;
- (γ) Ξεκινώντας από το τετράγωνο 2, υπολογίστε τον μέσο αριθμό των φορών που ο μεθυσμένος θα βρεθεί στην κατάσταση 3.

Λύση:

(α)

$$\alpha_1 = 1, \alpha_5 = 0$$

$$\alpha_2 = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot \alpha_3$$

$$\alpha_3 = 0.5 \cdot \alpha_2 + 0.5 \cdot \alpha_4$$

$$\alpha_4 = 0.5 \cdot \alpha_3 + 0.5 \cdot 0$$

Άρα $\alpha_3 = 2 \cdot \alpha_4$, και έτσι $1.5 \cdot \alpha_4 = 0.5 \cdot \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 3 \cdot \alpha_4$. Αντικαθιστώντας 2η εξίσωση έχουμε

$$3 \cdot \alpha_4 = 0.5 + \alpha_4 \Rightarrow \alpha_4 = 0.25$$

(β)

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= 0, \quad \mu_5 = 0 \\
\mu_2 &= 1 + 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot \mu_3 \\
\mu_3 &= 1 + 0.5 \cdot \mu_2 + 0.5 \cdot \mu_4 \\
\mu_4 &= 1 + 0.5 \cdot \mu_3 + 0.5 \cdot 0
\end{aligned}$$

$$\mu_3 = 2(\mu_4 - 1), \text{ άρα}$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot \mu_4 - 2 &= 1 + 0.5 \cdot \mu_2 + 0.5 \cdot \mu_4 \Rightarrow \\
1.5 \cdot \mu_4 - 3 &= 0.5 \cdot \mu_2 \Rightarrow \\
\mu_2 &= 3 \cdot \mu_4 - 6.
\end{aligned}$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
3 \cdot \mu_4 - 6 &= 1 + 0.5 \cdot (2 \cdot \mu_4 - 2) \Rightarrow \\
2 \cdot \mu_4 &= 6 \Rightarrow \\
\mu_4 &= 3 \Rightarrow \mu_3 = 4
\end{aligned}$$

(γ) Θα ξεκινήσουμε κατασκευάζοντας τον πίνακα Q ως τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης μεταξύ των μεταβατικών καταστάσεων 2,3 και 4.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον $N = (I - Q)^{-1}$.

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{adj}(I - Q) &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.75 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.75 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ακόμα,

$$\begin{aligned}
\det(I - Q) &= 1 \cdot (1 - 0.25) - (-0.5) \cdot (-0.5 - 0) + 0 \\
&= 0.75 - 0.25 = 0.5 > 0
\end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας αντιστρέφεται, και

$$N = (I - Q)^{-1} = \frac{\text{adj}(N)}{\det(N)} = \begin{bmatrix} \frac{0.75}{0.5} & \frac{0.5}{0.5} & \frac{0.25}{0.5} \\ \frac{0.5}{0.5} & \frac{1}{0.5} & \frac{0.5}{0.5} \\ \frac{0.25}{0.5} & \frac{0.5}{0.5} & \frac{0.75}{0.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

Ο μέσος αριθμός των φορών που ο μεθυσμένος επισκέπτεται την κατάσταση 3, ξεκινώντας από την κατάσταση 2 είναι το στοιχείο $N_{1,2} = 1$.

Το παραπάνω ισχύει καθώς ο πίνακας Q μας δίνει τις πιθανότητες μετάβασης σε μεταβατικές καταστάσεις, ενώ ο μοναδιαίος πίνακας I μας δίνει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των απορροφητικών καταστάσεων. Οπότε Q^n μας δίνει τις πιθανότητες να είμαστε σε κάθε μεταβατική κατάσταση μετά από n βήματα, χωρίς να έχουμε απορροφηθεί. Η συνολική προσδοκώμενη επισκεψιμότητα προκύπτει από:

$$N = I + Q + Q^2 + Q^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n = (I - Q)^{-1}$$

Η σειρά συγκλίνει καθώς όλες οι απορροφήσεις τελικά συμβαίνουν, ενώ μπορούμε να δούμε ότι το $(I - Q)^{-1}$ είναι ανάλογο του γνωστού αποτελέσματος για αριθμούς,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \text{ αν } |r| < 1.$$

Άσκηση 3.

Μια στοχαστική διαδικασία μοντελοποιεί τη διάδοση μιας φήμης σε μια παρέα φίλων ως εξής:

Υπάρχουν $N = 5$ άτομα, από τα οποία κάποιοι έχουν ακούσει τη φήμη και κάποιοι όχι. Σε κάθε διακριτή χρονική στιγμή, επιλέγονται τυχαία δύο άτομα από την παρέα για να αλληλεπιδράσουν. Όλα τα ζεύγη ατόμων είναι ισοπίθανα να επιλεγούν. Αν μόνο ο ένας από τους δύο έχει ακούσει τη φήμη, τότε με πιθανότητα $\alpha = 0.1$, η φήμη μεταδίδεται στον άλλον. Θεωρούμε ότι η διαδικασία ξεκινά στη χρονική στιγμή $n = 0$, όπου μόνο ένα άτομο γνωρίζει τη φήμη. Να υπολογιστεί ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι η φήμη να φτάσει στα αυτιά όλων.

Λύση: Αν $k = 1, 2, 3, 4$ άτομα γνωρίζουν τη φήμη και πραγματοποιηθεί μία αλληλεπίδραση, τότε ο αριθμός των ατόμων που θα γνωρίζουν τη φήμη θα είναι είτε k είτε $k + 1$. Ο μόνος τρόπος να μάθει τη φήμη ένα νέο άτομο είναι αν, από τα δύο άτομα που επιλέγονται να αλληλεπιδράσουν, το ένα γνωρίζει τη φήμη και το άλλο όχι, και το άτομο που γνωρίζει τη φήμη τη μεταδώσει (με πιθανότητα $\alpha = 0.1$). Δεδομένου ότι υπάρχουν k άτομα που γνωρίζουν τη φήμη και $5 - k$ που δεν τη γνωρίζουν, ο αριθμός των τρόπων να επιλεγεί ένα τέτοιο ζευγάρι είναι $k(5 - k)$. Επειδή υπάρχουν συνολικά $\binom{5}{2} = 10$ δυνατά ζευγάρια, η πιθανότητα να επιλεγεί ένα κατάλληλο ζευγάρι και να μεταδοθεί η φήμη είναι:

$$P[X_{n+1} = k + 1 | X_n = k] = \alpha \cdot \frac{k(5 - k)}{10} = \frac{k(5 - k)}{100}$$

για $k = 1, 2, 3, 4$. Γνωρίζουμε ότι το $k = 5$ είναι απορροφητική κατάσταση. Επομένως ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης θα είναι:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{24}{25} & \frac{1}{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{47}{50} & \frac{3}{50} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{47}{50} & \frac{3}{50} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{50} & \frac{1}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{24}{25} & \frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{47}{50} & \frac{3}{50} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{47}{50} & \frac{3}{50} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{50} & -\frac{3}{50} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{50} & -\frac{3}{50} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{50} \end{bmatrix}.$$

Έτσι,

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & \frac{50}{3} & \frac{50}{3} & 25 \\ 0 & \frac{50}{3} & \frac{50}{3} & 25 \\ 0 & 0 & \frac{50}{3} & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}.$$

Εφόσον ξεκινάμε στην κατάσταση 1 (μόνο ένας γνωρίζει τη φήμη), ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την απορρόφηση θα είναι το άθροισμα των στοιχείων της πρώτης γραμμής του πίνακα $(I - Q)^{-1}$:

$$25 + \frac{50}{3} + \frac{50}{3} + 25 = \frac{250}{3}.$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα λύνοντας το σύστημα εξισώσεων

$$\mu_1 = 1 + P_{11}\mu_1 + P_{12}\mu_2 \quad \mu_2 = 1 + P_{22}\mu_2 + P_{23}\mu_3 \quad \mu_3 = 1 + P_{33}\mu_3 + P_{34}\mu_4 \quad \mu_4 = 1 + P_{44}\mu_4 + P_{45}\mu_5$$

όπου $\mu_5 = 0$, με $\mu_i = \mathbb{E}[T|X_0 = i]$, $T = \min\{n \geq 0 | X_n = 5\}$

Άσκηση 4.

Έστω ότι παίζετε ένα παιχνίδι στο οποίο κερδίζετε ένα ευρώ με πιθανότητα p , και χάνετε ένα ευρώ με πιθανότητα $q = 1 - p$. Υπολογίστε την ποσότητα

$$\alpha_x := P_x(S_b < S_0),$$

δηλαδή την πιθανότητα να κερδίσετε ένα ποσό b προτού χάσετε όλα σας τα λεφτά, ξεκινώντας με ένα ποσό x .

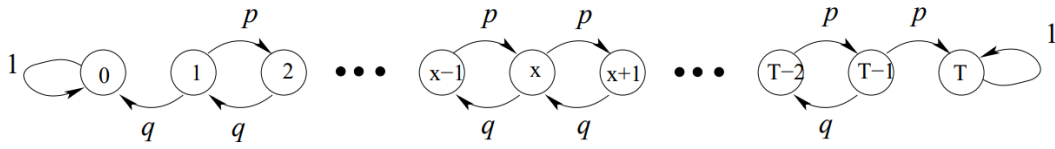
- (α) Μοντελοποιήστε το πρόβλημα σαν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα, με καταστάσεις $0, 1, 2, \dots, b$, όπου οι καταστάσεις 0 και b είναι απορροφητικές.
- (β) Υπολογίστε τις εξισώσεις για τις πιθανότητες απορρόφησης.
- (γ) Αν $p = q = \frac{1}{2}$, δείξτε ότι

$$\alpha_x = \frac{x}{b}.$$

Λύση:

- (α) Αν ο αριθμός των χρημάτων που έχει μια δεδομένη στιγμή είναι x , τότε την επόμενη στιγμή θα έχει είτε $x + 1$ είτε $x - 1$, με πιθανότητα p ή $1 - p$, αντίστοιχα, μέχρις ότου το x γίνει ίσο είτε με b είτε με 0 . Υποθέτουμε ότι η έκβαση κάθε παιχνιδιού είναι ανεξάρτητη από την έκβαση των προηγούμενων. Επομένως το πρόβλημα μοντελοποιείται ως Μαρκοβιανή αλυσίδα, με τις καταστάσεις 0 (στην οποία ο παίκτης έχει χάσει όλα του τα λεφτά) και T (στην οποία ο παίκτης έχει φτάσει το επιθυμητό ποσό b) να είναι απορροφητικές.

Το γράφημα της αλυσίδας θα είναι:



(β)

$$\alpha_0 = 0$$

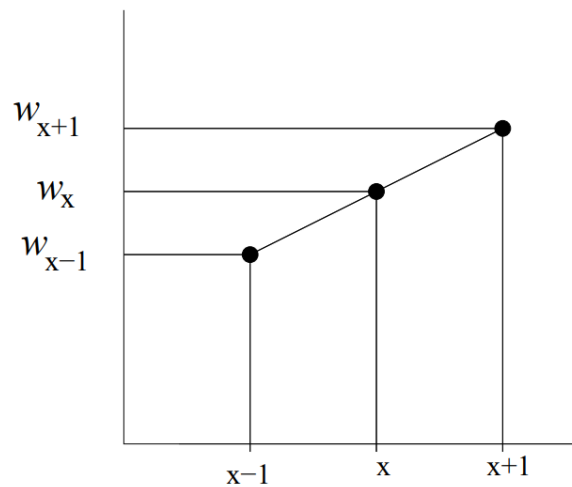
$$\alpha_b = 1$$

$$\alpha_x = p \cdot \alpha_{x+1} + q \cdot \alpha_{x-1}$$

(γ) Αν $p = q = \frac{1}{2}$,

$$\alpha_x = \frac{\alpha_{x+1} + \alpha_{x-1}}{2}, \quad x = 1, 2, \dots, b-1.$$

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο (x, α_x) στο επίπεδο βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $(x-1, \alpha_{x-1})$, $(x+1, \alpha_{x+1})$. Επομένως, η γραφική παράσταση του α_x πρέπει να είναι ευθεία γραμμή.



Δηλαδή

$$\alpha_x = Ax + B.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές A και B από τα σημεία $\alpha_0 = 0$ και $\alpha_b = 1$. Επομένως

$$\alpha_x = \frac{x}{b}$$

Άσκηση 5.

Το πόνι του ίππου στο σκάκι κινείται με τον επιτρεπόμενο τρόπο, δηλαδή με κίνηση που σχηματίζει ένα κεφαλαίο Γ, πάνω σε μια κλασική σκακιέρα 8×8 . Ο ίππος επιλέγει ομοιόμορφα στην τύχη το τετράγωνο στο οποίο θα μετακινηθεί. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται άπειρες φορές, κάθε φορά με την ίδια λογική: ο ίππος κινείται τυχαία, επιλέγοντας ισοπίθανα ανάμεσα στις διαθέσιμες κινήσεις του, χωρίς μνήμη του παρελθόντος. Να μοντελοποιήσετε την παραπάνω τυχαία διαδικασία ως αλυσίδα Markov και να απαντήσετε στα εξής:

- (α) Γιατί η παραπάνω στοχαστική διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ως αλυσίδα Markov;
- (β) Να ορίσετε τον χώρο καταστάσεων της αλυσίδας.
- (γ) Να βρείτε την στατική κατανομή της αλυσίδας. Ποια είναι η φυσική ερμηνεία αυτής της κατανομής;
- (δ) Αν ο ίππος ξεκινά από το τετράγωνο A1 (κάτω αριστερά στη σκακιέρα), να υπολογίσετε τον μέσο αριθμό κινήσεων έως ότου ξαναβρεθεί στην αρχική του θέση.
- (ε) Ποια τετράγωνα της σκακιέρας έχουν τη μεγαλύτερη πιθανότητα στην στατική κατανομή; Ποια έχουν τη μικρότερη; Πώς το εξηγείτε αυτό;

Λύση:

- (α) Παρατηρούμε ότι από τα δεδομένα του προβλήματος η θέση X_{n+1} στην οποία θα βρεθεί ο ίππος, εξαρτάται από την τωρινή του θέση X_n και από μια τυχαία επιλογή ξ_n μιας γειτονικής επιτρεπόμενης θέσης, χωρίς μνήμη των προηγούμενων καταστάσεών του. Επομένως το πρόβλημα μοντελοποιείται ως Markovιανή αλυσίδα.
- (β) Υπάρχουν $8 \times 8 = 64$ τετράγωνα στη σκακιέρα. Θα ονοματίσουμε το καθένα ως ένα ζευγάρι αριθμών, έτσι

$$S = \{(i_1, i_2) : 1 \leq i_1 \leq 8, 1 \leq i_2 \leq 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

- (γ) Θα υποθέσουμε ότι αν $x = (i_1, i_2)$, τότε $\pi(x)$ θα έχει τιμή ανάλογη με τον αριθμό $N(x)$ των πιθανών επόμενων καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί ο ίππος από το τετράγωνο x ,

$$\pi(x) = CN(x).$$

Πρέπει αρχικά να αποδείξουμε ότι η υπόθεσή μας είναι σωστή. Έστω y ένας γείτονας του x , δηλαδή μια επόμενη πιθανή κατάσταση που μπορεί να μεταβεί ο ίππος από την κατάσταση x . Θα πρέπει να ισχύει

$$\pi(x) = \sum_{y \in S} \pi(y) p_{y,x}.$$

Αντικαθιστώντας,

$$\begin{aligned} N(x) &= \sum_{y \in S} N(y) p_{y,x} \Leftrightarrow \\ N(x) &= \sum_{y \in S: x \text{ γείτονας με } y} N(y) p_{y,x} \end{aligned}$$

Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι η επιλογή του γείτονα γίνεται τυχαία, άρα

$$p_{y,x} = \begin{cases} \frac{1}{N(y)}, & \text{αν } x \text{ γείτονας του } y \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έτσι η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned} N(x) &= \sum_{y \in S: x \text{ γείτονας με } y} N(y) \frac{1}{N(y)} \\ &= \sum_{y \in S: x \text{ γείτονας με } y} 1 \\ &= \sum_{y \in S: y \text{ γείτονας με } x} 1. \end{aligned}$$

Το τελευταίο ισχύει λόγω συμμετρίας (αν x γείτονας y , τότε και y γείτονας x), και παρατηρούμε ότι από ορισμό του $N(x)$ η εξίσωση ισχύει. Επομένως η αρχική μας υπόθεση είναι σωστή. Το μόνο λοιπόν που έχουμε να κάνουμε είναι για κάθε θέση x στη σκακιέρα, να μετρήσουμε τον αριθμό των γειτόνων της.

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

Έχουμε:

$$2 \times 4 + 3 \times 8 + 4 \times 20 + 6 \times 16 + 8 \times 16 = 336$$

Επομένως $C = \frac{1}{336}$, και

$$\pi(1,1) = \frac{2}{336}, \pi(1,2) = \frac{3}{336}, \pi(1,3) = \frac{4}{336}, \dots, \pi(4,4) = \frac{8}{336}, \dots$$

(δ) Έχουμε

$$\mathbb{E}_{(1,1)}[T_{(1,1)}] = \frac{1}{\pi(1,1)} = \frac{1}{\frac{2}{336}} = \frac{336}{2} = 168.$$

(ε) Τα γωνιακά τετράγωνα έχουν τη μικρότερη πιθανότητα, ενώ τα κεντρικά τη μεγαλύτερη ($\frac{8}{336}$). Αυτό είναι εμφανές καθώς ο αριθμός γειτόνων κεντρικών τετραγώνων είναι μεγαλύτερος, και εφόσον έχουμε υποθέσει ότι η επιλογή του γείτονα γίνεται τυχαία, αυτό σημαίνει ότι ο ίππος θα βρίσκεται πιο συχνά στο κέντρο από ότι στα άκρα της σκακιέρας.

Άσκηση 6.

Ενδεικτικός κώδικας σε Python διαθέσιμος σαν notebook στο Google Colab εδώ. Παρατηρούμε ότι η πειραματική κατανομή συνάδει με την αναμενόμενη στατική κατανομή. Τα κεντρικά τετράγωνα έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα από ότι τα ακριανά, ενώ η τιμή για τον μέσο χρόνο επιστροφής στο τετράγωνο A1 είναι αρκετά κοντά στη θεωρητική.