

5-4-2025

**ΘΕΜΑ 1ο** Έστω  $N$  το πλήθος των μηνυμάτων στο πακέτο.

Δίδεται ότι  $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ . Συνεπώς:

$$P_N(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} ; n=0,1,2,\dots$$

$$E[N] = \lambda = \text{var}(N)$$

$$M_N(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}$$

Επίσης, μας δίδεται ότι οι  $X_i$  είναι iid  $X_i \sim U[a, b]$ , όπου  $[a, b] = [0, 1]$ . Συνεπώς:

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$E[X_i] = \mu_x = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}, \quad E[X_i^2] = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{var}(X_i) = \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

$$M_{X_i}(s) = \frac{1}{b-a} \frac{e^{sb} - e^{sa}}{s} = \frac{e^s - 1}{s}$$

(α) Η τ.μ.  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N$  είναι το άθροισμα ενός τυχαίου αριθμού,  $N$ , τ.μ.  $X_i$  όπου  $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$  και  $X_i \sim U[0, 1]$ . Συνεπώς:

$$E[Y] = \mu_x \cdot E[N] = \frac{1}{2} \lambda = \lambda/2$$

$$\text{var}(Y) = \sigma_x^2 E[N] + \mu_x^2 \text{var}(N) = \frac{1}{12} \lambda + \frac{1}{4} \lambda = \lambda/3$$

$$(β) M_Y(s) = M_N(s) \Big|_{e^s \leftarrow M_X(s)} = e^{\lambda(e^s - 1)} \Big|_{e^s \leftarrow M_X(s)} \Rightarrow$$

$$M_Y(s) = e^{\lambda(M_X(s) - 1)} = e^{\lambda\left(\frac{e^s - 1}{s} - 1\right)}$$

(8) Πρέπει να υπολογίσουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της  $M_Y(s)$ :

$$M_Y'(s) = e^{\lambda(\mu_X(s)-1)} \cdot \lambda M_X'(s)$$

$$\therefore E[Y] = M_Y'(s) \Big|_{s=0} = e^{\lambda(\mu_X(0)-1)} \lambda M_X'(0), \quad \begin{bmatrix} M_X(0)=1 \\ M_X'(0)=\mu_X \end{bmatrix}$$

$$= e^{\lambda(1-1)} \cdot \lambda \mu_X = 1 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{2} = \lambda/2 //$$

Επίσης,

$$M_Y''(s) = e^{\lambda(\mu_X(s)-1)} (\lambda M_X'(s))^2 + e^{\lambda(\mu_X(s)-1)} \lambda M_X''(s)$$

$$\therefore E[Y^2] = M_Y''(s) \Big|_{s=0} = e^{\lambda(\mu_X(0)-1)} (\lambda M_X'(0))^2 + e^{\lambda(\mu_X(0)-1)} \lambda M_X''(0)$$

$$= e^{\lambda(1-1)} \lambda^2 \mu_X^2 + e^{\lambda(1-1)} \lambda E[X^2]$$

$$= \lambda^2 \frac{1}{4} + \lambda \cdot \frac{1}{3} = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{3}.$$

$$\therefore \text{var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{3} - \frac{\lambda^2}{4} = \lambda/3 //$$

**ΘΕΜΑ 2ο**

(3)

Η πιθανότητα κάποιος από τους  $n=2000$  φοιτητές να χρειαστεί υπολογιστή είναι  $p = \frac{50}{2000} = 0.025$ .

Έστω  $N$  το πλήθος των φοιτητών που χρειάζονται υπολογιστή. Αναγνωρίζουμε ότι  $N \sim \Delta(n=2000, p=0.025)$ .

Συνεπώς  $E[N] = np = 2000 \times 0.025 = 50$

$$\text{var}(N) = np(1-p) = 2000 \times 0.025 \times 0.975 = 48.75$$

Έστω  $m$  το πλήθος των διαθέσιμων υπολογιστών.

Θέλουμε να ισχύει:

$$P(N \leq m) \geq 0.90$$

Χρησιμοποιώντας την De Moivre-Laplace προσέγγιση της Διωνυμικής, έχουμε ότι:

$$P(N \leq m) = P\left(\frac{N-50}{\sqrt{48.75}} \leq \frac{m-50}{\sqrt{48.75}}\right) \geq 0.90$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{m+\frac{1}{2}-50}{\sqrt{48.75}}\right) \geq \Phi(1.282) \quad \left[ \text{με τη "διόρθωση συνέχειας"} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{m+\frac{1}{2}-50}{\sqrt{48.75}} \geq 1.282$$

$$\Rightarrow m \geq 58.4511$$

Άρα, ο ελάχιστος αριθμός υπολογιστών πρέπει να είναι 59.

- (α) Οι τρεις ανεξάρτητες σ.δ. Poisson μπορούν να ωχωνευθούν σε μια σ.δ. Poisson έντασης  $a+b+c$ . Σε αυτή τη σ.δ., η πιθανότητα ένα πακέτο να είναι τύπου A είναι:

$$P(A) = \frac{a}{a+b+c}$$

Συνεπώς, η πιθανότητα στα πρώτα 10 πακέτα, το τρίτο να είναι τύπου A και ένα από τα υπόλοιπα 9 να είναι επίσης τύπου A είναι:

$$P(A) \cdot \binom{9}{1} P(A) [1-P(A)]^8 = 9 P(A)^2 (1-P(A))^8$$

$$= 9 \frac{a^2}{(a+b+c)^2} \left(1 - \frac{a}{a+b+c}\right)^8 = 9 \frac{a^2 (b+c)^8}{(a+b+c)^{10}}$$

- (β) Ζητάμε το χρόνο  $T$  έως την 10 άφιξης πακέτου σε ωχωνευμένη σ.δ. Poisson  $(a+b+c)$ . Αυτός έχει κατανομή Erlang τάξης 10 με παράμετρο  $(a+b+c)$ :

$$f_T(t) = \frac{(a+b+c)^{10} t^9}{9!} e^{-(a+b+c)t}; t \geq 0.$$

$$E[T] = \frac{10}{a+b+c} \quad \text{var}(T) = \frac{10}{(a+b+c)^2}$$

- (γ) Ορίζουμε  $X: \{\text{ακριβώς δύο πακέτα τύπου A φτάνουν σε 5'}\}$   
 $Y: \{\text{--- " ---}\}$   
 $Z: \{\text{--- " ---}\}$

Ζητάμε  $P(X \cap Y \cap Z) = P(X) \cdot P(Y) \cdot P(Z)$  λόγω ανεξαρτησίας

$$= \frac{(5a)^2}{2!} e^{-5a} \cdot \frac{(5b)^2}{2!} e^{-5b} \cdot \frac{(5c)^2}{2!} e^{-5c}$$

$$= \frac{(125abc)^2}{8} e^{-5(a+b+c)}$$

(3)

(δ) Σε αυτή την περίπτωση ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών αδεσφάτων ται buffer ακολουθεί κατανομή Erlang τάξης 3 με παράμετρο  $a$ :

$$f_T(t) = \frac{a^3 t^2}{2} e^{-at}; \quad t \geq 0.$$

$$E[T] = \frac{3}{a} \quad \text{Var}(T) = \frac{3}{a^2}.$$

(ε-ι)  $V$  είναι ο χρόνος έως την επόμενη άφιξη των συχλωμένων με Poisson  $(a+b+c)$ . Συνεπώς  $V \sim \exp(a+b+c)$ :

$$f_V(v) = (a+b+c) e^{-(a+b+c)v}; \quad v \geq 0$$

- (ε-ii). Αν ο παρατηρητής φτάσει πριν την πρώτη άφιξη λακέται τύπος A, τότε η  $V$  είναι Erlang τάξης 3 με παράμετρο  $a$ .
- Αν ο παρατηρητής φτάσει μεταξύ της πρώτης και δεύτερης άφιξης λακέται τύπος A, τότε  $V \sim$  Erlang τάξης 2 με παρ.  $a$ .
  - Αν ο παρατηρητής φτάσει μεταξύ της δεύτερης και τρίτης άφιξης λακέται τύπος A, τότε  $V \sim \exp(a)$ .

Ο παρατηρητής φτάνει με ίση πιθανότητα πριν τη πρώτη άφιξη λακέται A, μεταξύ πρώτης & δεύτερης και μεταξύ δεύτερης και τρίτης. Συνεπώς από το ΘΟΠ έχουμε:

$$f_V(v) = \frac{1}{3} \frac{a^3 v^2}{2!} e^{-av} + \frac{1}{3} a^2 v e^{-av} + \frac{1}{3} a e^{-av}; \quad v \geq 0$$

□